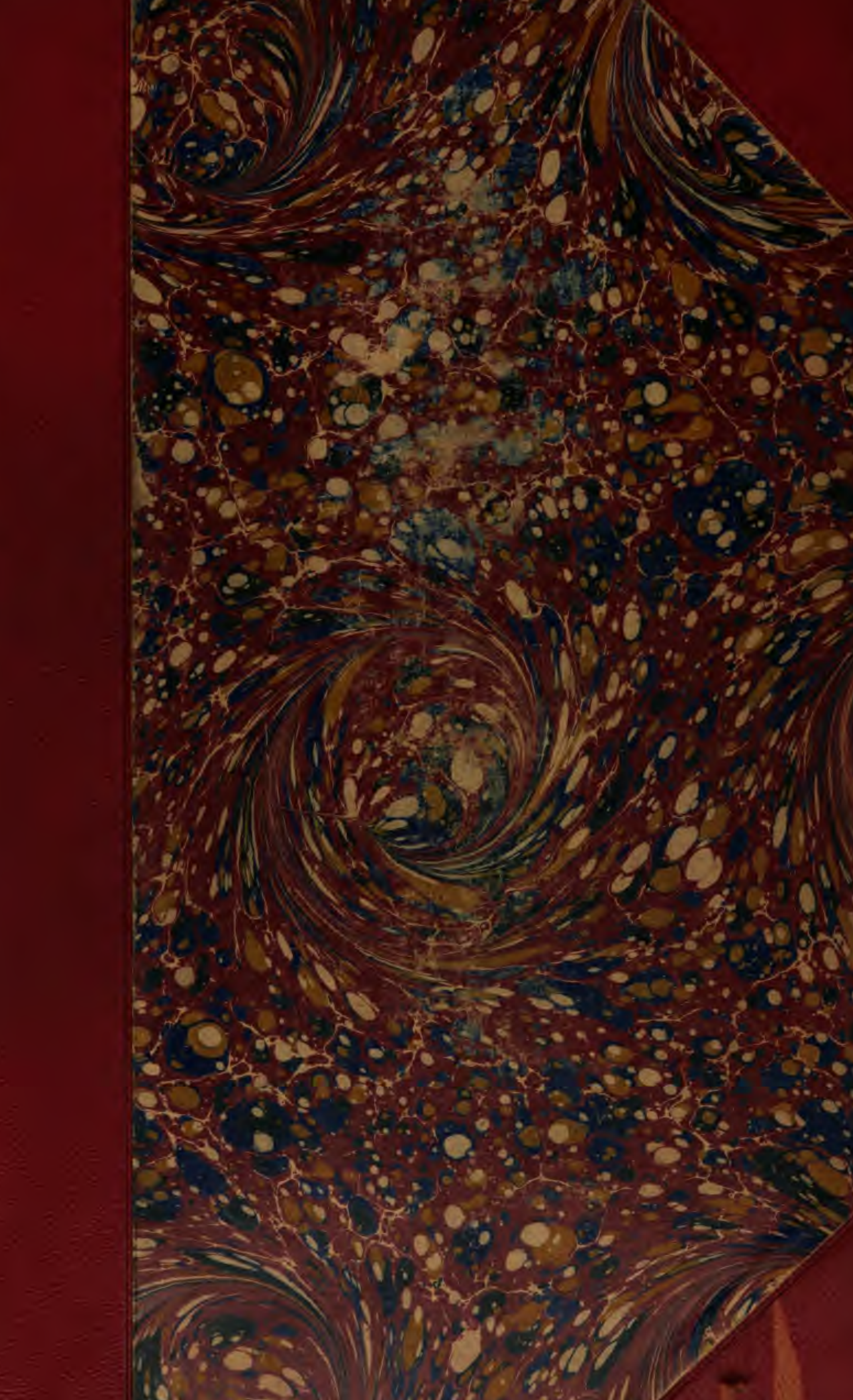
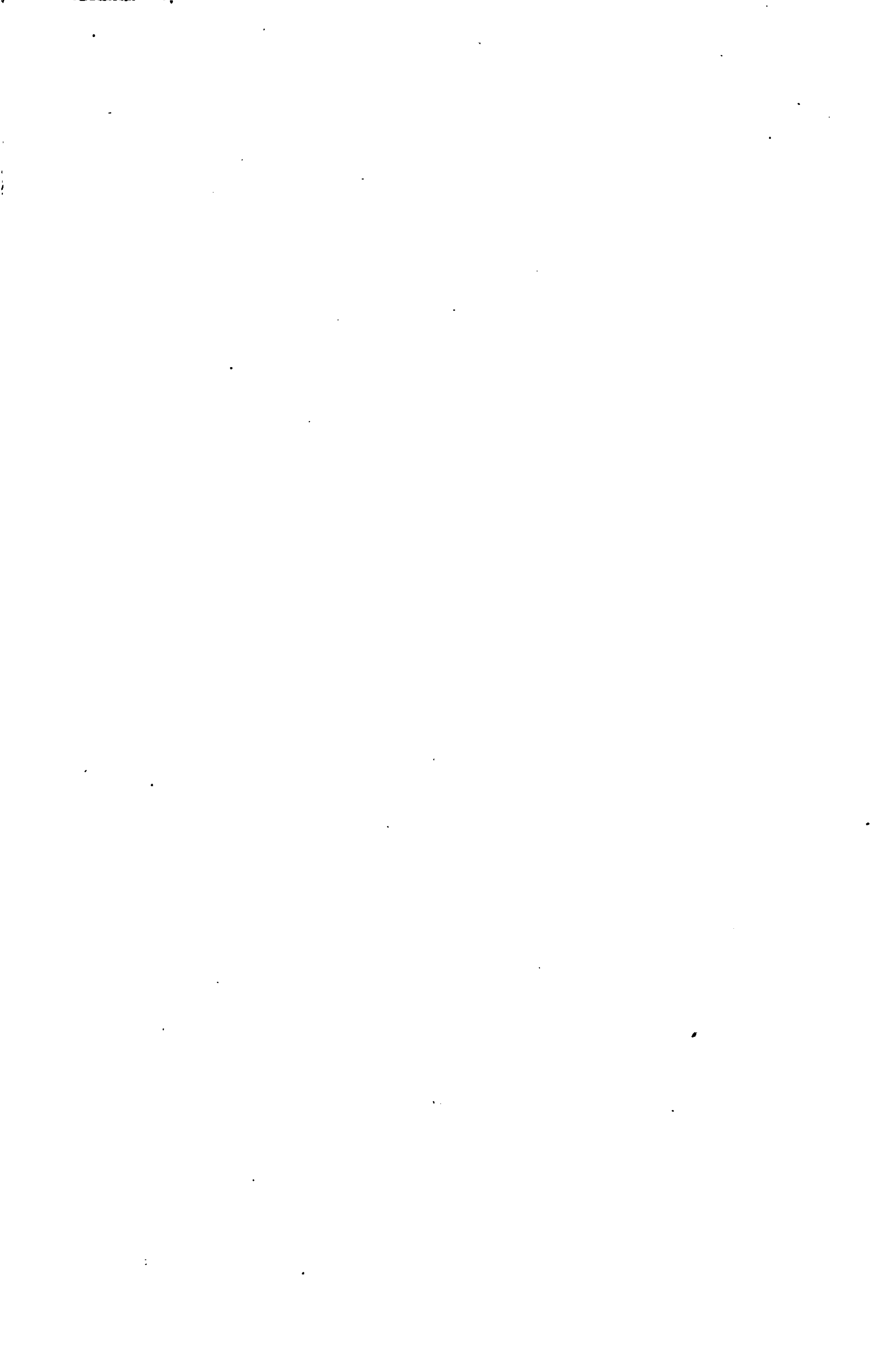
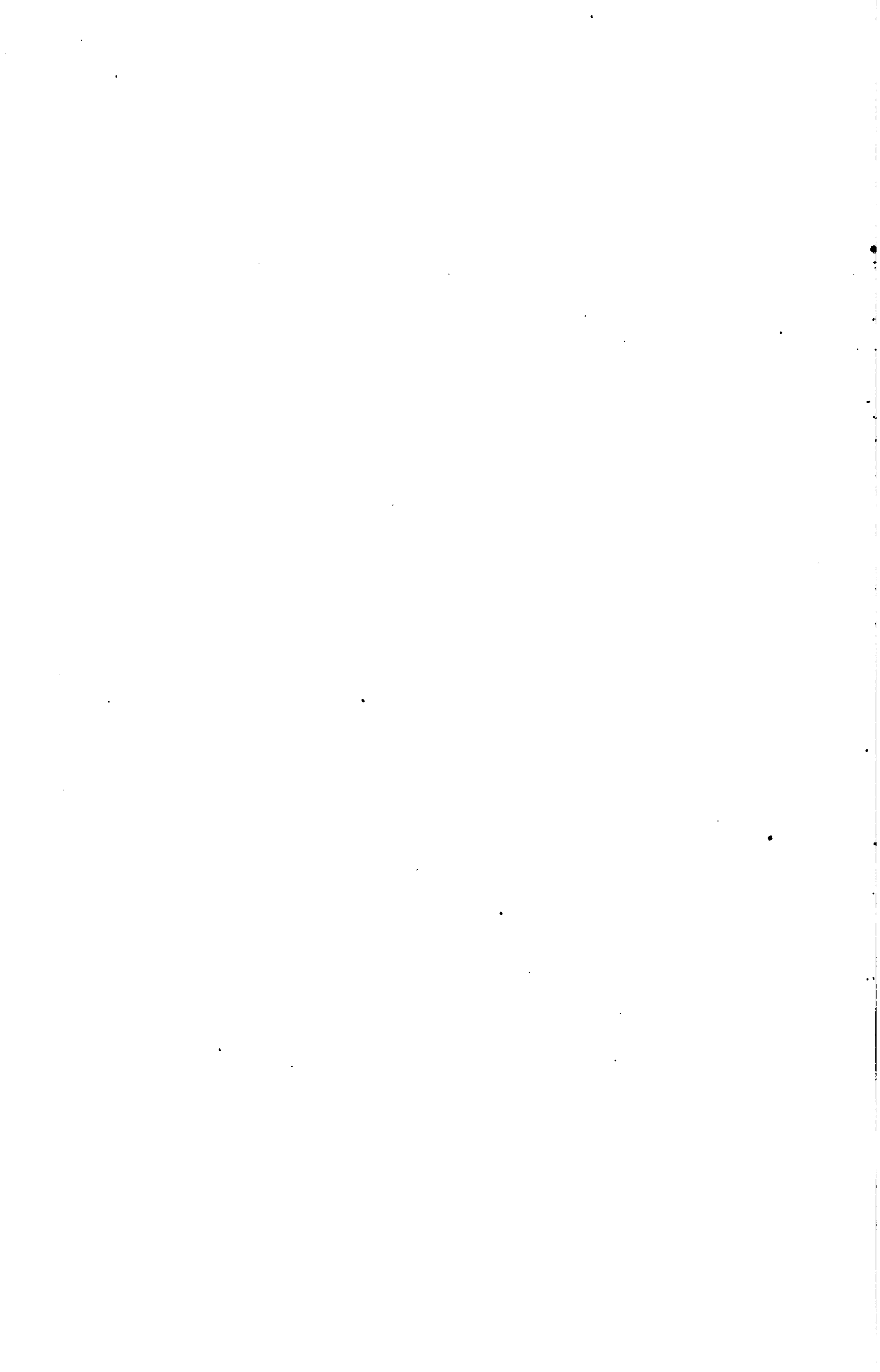
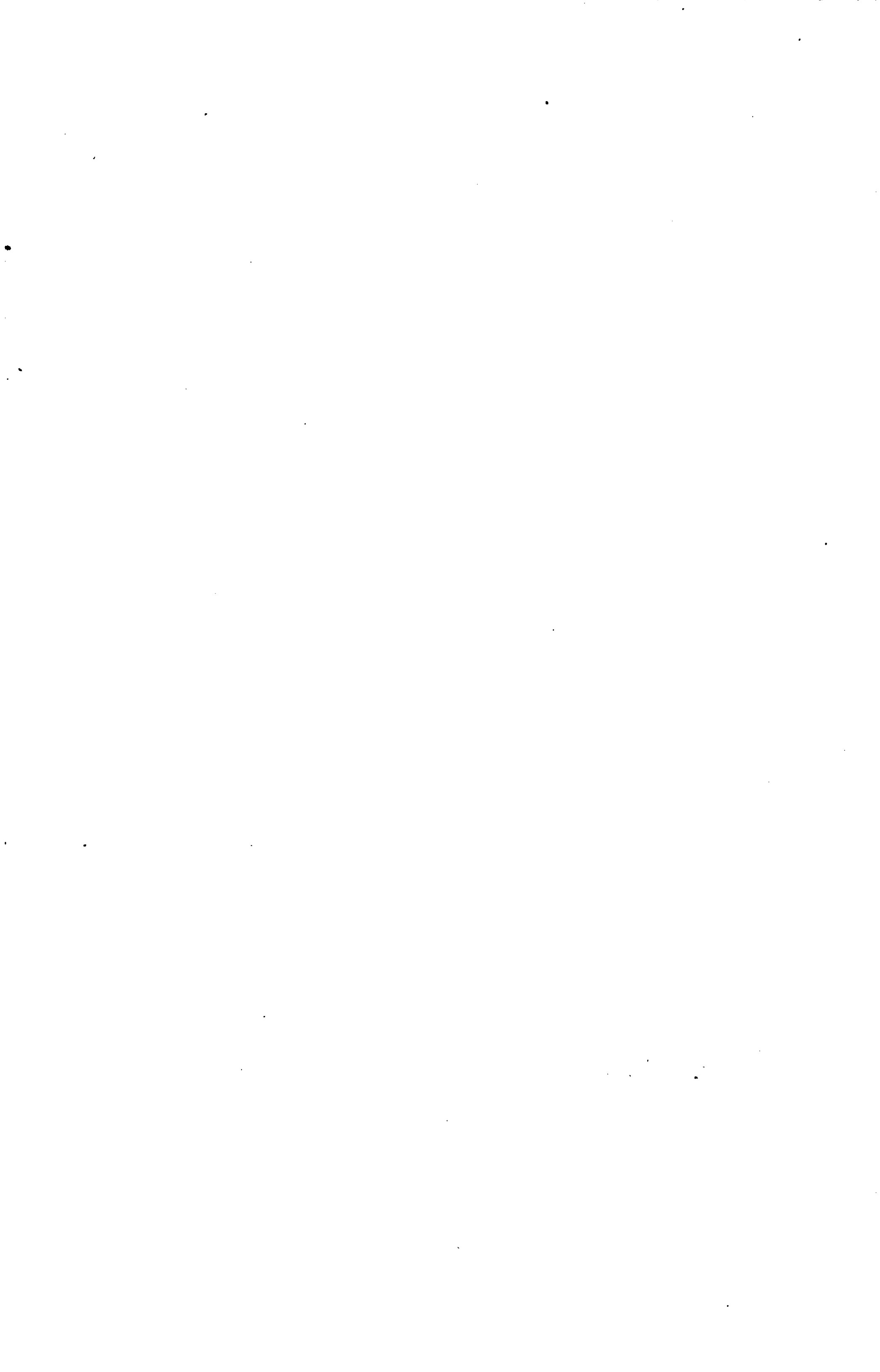
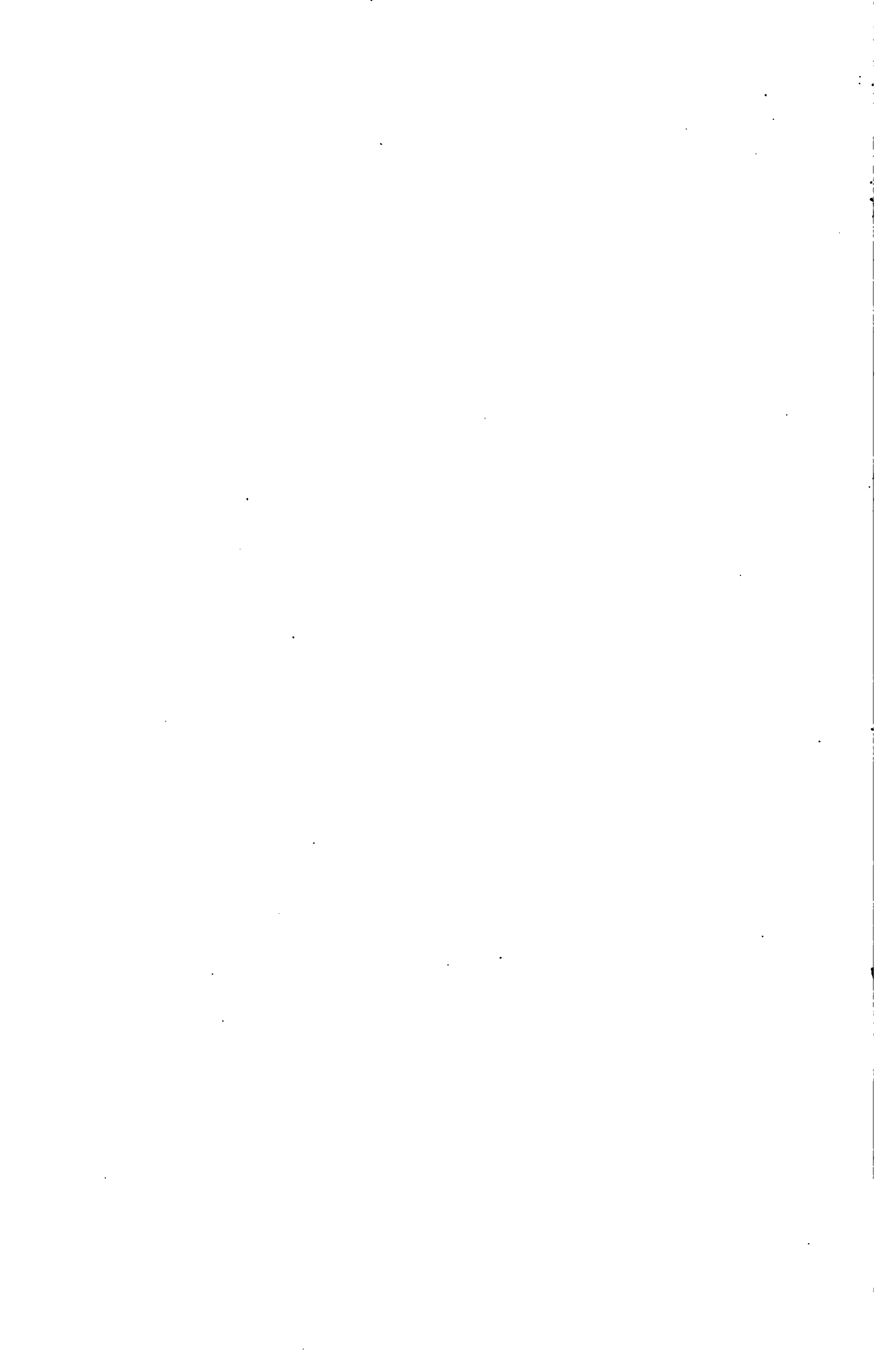












Lehrbuch

der

analytischen Geometrie

in

homogenen Koordinaten

von

Dr. Wilhelm Killing,

Professor der Mathematik an der Kgl. Akademie zu Münster i. W.

Erster Teil:

Die ebene Geometrie.

Mit 50 Figuren im Text.

Paderborn.

Druck und Verlag von Ferdinand Schöningh.

1900.

Vorwort.

Das wichtigste Hilfsmittel zur analytischen Erforschung der metrischen Eigenschaften des Raumes werden stets die rechtwinkligen Koordinaten Descartes' bilden; für die erste Einführung des Studierenden in die analytische Geometrie sind sie geradezu unentbehrlich. Der Anfänger will nur mit solchen Gröfsen operieren, welche eine klar hervortretende geometrische Bedeutung haben und welche sich infolgedessen in jedem Augenblicke durch Konstruktion zur Anschauung bringen lassen. Diese Eigenschaft bildet aber einen besondern Vorzug der Cartesischen Koordinaten. Dazu kommt die Leichtigkeit, mit der man in die Theorie dieser Koordinaten eindringen kann; sobald der Anfänger einige wenige Begriffe aufgenommen hat, vermag er mit ihrer Hilfe auf analytischem Wege zahlreiche Lehrsätze, die ihm bis dahin unbekannt waren, aufzufinden und zu beweisen. Daher darf man den Unterricht in der analytischen Geometrie nur mit diesen Bestimmungsgröfsen beginnen.

Andererseits mufs man aber von jedem angehenden Mathematiker auch volle Beherrschung der Dreiecks-Koordinaten in der Ebene und der Tetraeder-Koordinaten im Raume, der sog. homogenen Koordinaten, verlangen. Will der Studierende dies Ziel mit Sicherheit erreichen, so mufs er sich möglichst früh mit diesen Gröfsen bekannt machen; er mufs ihre Beziehung zu den Cartesischen Koordinaten genau kennen und mufs endlich dazu angehalten werden, mit den neuen Koordinaten zu arbeiten. Demnach erachte ich es für das beste, den Anfänger ganz rasch unter Benutzung der Cartesischen Koordinaten mit den einfachsten Eigenschaften der Kurven und Flächen zweiter Ordnung bekannt zu machen und ihn dann sofort in die homogenen Koordinaten

einzuführen. Wer bereits mit Hilfe leichterer Rechnungen in die Eigenschaften der Flächen zweiten Grades eingedrungen ist, hat hinreichendes Interesse für die Anwendung der Analysis auf die Geometrie gewonnen, um vor längeren Darlegungen, wie sie die Einführung der neuen Koordinaten nun einmal notwendig macht, nicht zurückzuschrecken. Auch bietet sich dem Studierenden alsdann noch Lehrstoff genug, in den er sich mit dem neuen Hilfsmittel hineinarbeiten mufs, um einerseits vollständig in die Theorie der homogenen Koordinaten einzudringen, andererseits für die Mühe belohnt zu werden, welche mit der Aneignung der neuen Methode verbunden ist. Als den trefflichsten Gegenstand zur Einübung der homogenen Koordinaten erachte ich die Lehre von den Polareigenschaften der Kurven und Flächen zweiten Grades. Denn erstens sind homogene Koordinaten für die Behandlung dieses Gebietes am geeignetsten; zweitens lassen sich die meisten Eigenschaften jener Kurven und Flächen den Polareigenschaften unterordnen oder doch zu ihnen in Beziehung bringen. Dadurch erwachsen aber dem Unterricht zahlreiche Vorteile. Der Mathematiker kann nicht früh genug dazu angeleitet werden, eine einmal angewandte Untersuchungsmethode nach den verschiedensten Seiten zu verfolgen. Zudem werden verschiedenartige Entwicklungen leicht verständlich, wofern sie von einem einzigen Grundgedanken beherrscht werden. Je mehr endlich die Zahl der Lehrsätze anwächst, welche im Gedächtnisse festgehalten werden müssen, um so notwendiger wird es, zahlreiche Einzelsätze in einem einzigen allgemeinen Satze zusammenzufassen.

An sich sind die homogenen Dreiecks- und Tetraeder-Koordinaten besonders geeignet, um die projektiven Eigenschaften zu erforschen; sie direkt für die Metrik zu benutzen, würde verkehrt und geradezu schädlich sein. Sie leisten aber auch für die Erforschung der metrischen Eigenschaften wesentliche Dienste, sobald man die uneigentlichen Gebilde eingeführt hat. Dafs diese Gebilde zuweilen (hoffentlich von keinem Mathematiker) falsch aufgefafst und mit wirklichen Gebilden verwechselt werden, kann keinen Grund bilden, sie vom Unterrichte auszuschliefsen. Bei richtiger Behandlung wird auch der Anfänger in ihnen nichts weiter erblicken, als ein Mittel, verschiedenartige Sätze sprachlich zusammenzufassen und einheitlich zu begründen. Er wird dies

Hilfsmittel aber, nachdem er sich in den Gebrauch hineingelebt und seine Vorzüge kennen gelernt hat, nicht mehr entbehren wollen. Dennoch wird es gut sein, wenn man den Lernenden beim weiteren Fortschreiten zwingt, sich stets die in dem zusammenfassenden Satze enthaltenen geometrischen Einzelsätze klar zu machen und die Beweise auch unabhängig von jenem Hilfsmittel zu führen.

Nach der Einführung der unendlichfernen Gebilde stellen sich die Cartesischen Koordinaten als ein specieller Fall der homogenen Koordinaten dar. Schon aus diesem Grunde darf man sich nicht scheuen, für zahlreiche Untersuchungen wieder auf die Koordinaten Descartes' zurückzugehen. Um nur ein Beispiel anzuführen, verweise ich auf die konfokalen Flächen zweiten Grades. Die Eigenschaften dieses Systems von Flächen führen sich auf möglichst wenige Principien zurück, wenn man dasselbe mit Plücker als eine solche Flächenschar zweiter Klasse betrachtet, welcher der unendlichferne Kugelkreis angehört. Man wird daher am besten zuerst die Schar der Flächen zweiter Klasse untersuchen und dabei, weil dies Gebiet der Projektivität angehört, Tetraeder-Koordinaten benutzen; alsdann wird man die hierfür gefundenen Resultate auf den angegebenen besondern Fall übertragen und zuletzt die Theorie der konfokalen Flächen mit Hilfe von rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten zum Abschlufs bringen.

Der Fälle sind aber recht viele, wo die mit den rechtwinkligen Koordinaten vorzunehmenden Operationen erst dann in ihrer vollen Bedeutung gewürdigt werden können, wenn man die Beziehung zu allgemeinen projektiven Untersuchungen kennt. Auch hierin liegt ein gewichtiger Grund dafür, die homogenen Koordinaten recht früh einzuführen. Dem Lernenden erwächst dann der Vorteil, dafs er schon im Beginne seiner Studien angehalten wird, sich jedesmal für die ihn beschäftigende Untersuchung die passendsten Koordinaten, überhaupt die geeignetsten Hilfsmittel auszuwählen.

Eine solche Behandlung der homogenen Koordinaten, wie sie mir nach den vorstehenden Darlegungen notwendig erscheint, habe ich in den mir zugänglichen Büchern nicht gefunden. Zwar gehen die gröfseren Werke über analytische Geometrie, an denen unsere Litteratur glücklicherweise keinen Mangel hat, auch auf

jene Koordinaten ein. Aber einerseits beabsichtigen diese Bücher mehr, den gesamten bis jetzt gewonnenen Wissensstoff mitzuteilen oder zur selbständigen Forschung anzuregen, und eignen sich schon aus diesem Grunde weniger für die erste Einführung; andererseits überlassen sie dem Leser die Beantwortung mancher wichtigen Frage und bieten so dem Anfänger zu grofse Schwierigkeit. Aus diesem Grunde glaube ich, manchem Studierenden einen Dienst zu erweisen, wenn ich den zweiten Teil meiner Vorlesungen über analytische Geometrie, wie ich sie seit einer Reihe von Jahren an der hiesigen Akademie halte, zu einem Lehrbuche ausarbeite und dem Druck übergebe.

Ich setze somit in den folgenden Entwicklungen die Bekanntschaft mit den Cartesischen Koordinaten und einige Übung in ihrem Gebrauche voraus. Hierfür möchte ich vor allem auf die Lehrbücher von Frischauf, Ganter und Rudio, sowie von Schur verweisen. Wer aus einem dieser Bücher die einleitenden Kapitel und auch den einen oder andern weiteren Abschnitt aus der Geometrie der Ebene und des Raumes durchgenommen hat, wird mit Leichtigkeit in das vorliegende Lehrbuch eindringen können.

Von analytischen Vorkenntnissen durfte ich auf die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Determinanten nicht verzichten. Dagegen war ich nicht genötigt, von der Differential- und Integralrechnung Gebrauch zu machen. Diejenigen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, bei deren Herleitung die Infinitesimalrechnung nicht entbehrt werden kann, werden meines Erachtens am besten bei der allgemeinen Lehre von den krummen Flächen, speciell bei der Krümmungstheorie, durchgenommen. Jedoch erachtete ich es aus mancherlei Gründen für angebracht, wenigstens in den Übungen partielle Differentialquotienten zu benutzen.

Dafs ich die Projektivität aus der Metrik hergeleitet und nicht selbständig begründet habe, wird man hoffentlich bei dem Charakter des Buches billigen. Reifliche Erwägungen waren es auch, die mich bestimmten, die Plückerschen Koordinaten der geraden Linien des Raumes nicht aufzunehmen.

Nur ungern habe ich darauf verzichtet, in einem historischen Überblicke die Entwicklung der homogenen Koordinaten darzulegen. Ich verkenne nicht, dafs es auch für den Anfänger interessant und bildend sein mufs, zu erfahren, in welchem Sinne dies

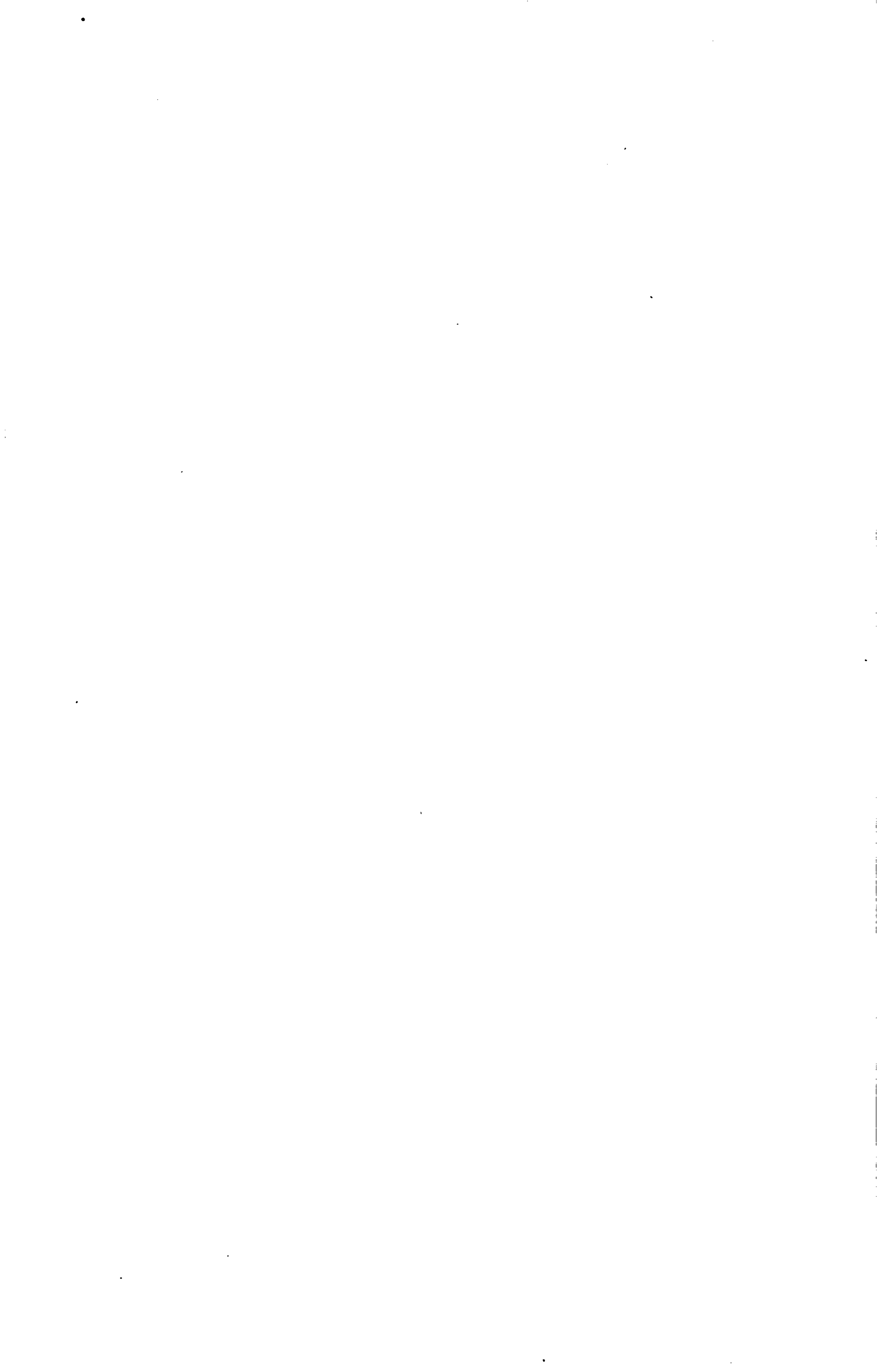
Hilfsmittel von den einzelnen Forschern, welche es zuerst benutzt haben, angewandt worden ist. Aber ich mochte den Umfang des Buches nicht weiter anwachsen lassen und durfte aus diesem Grunde auf die allmähliche Entwicklung der Methode nicht eingehen. Infolge dessen hatte es keinen rechten Zweck, bei einzelnen Lehrsätzen den ersten Entdecker anzugeben; ich mufste also von allen Litteraturnachweisen absehen.

Den einzelnen Paragraphen habe ich zahlreiche Übungsaufgaben beigefügt. Wenn manche unter ihnen dem gereifteren Leser zu einfach erscheinen sollten, so wolle er berücksichtigen, dafs sie hauptsächlich den Zweck haben, die vorgetragenen Sätze und Methoden einzuüben und zu befestigen, und dafs aus diesem Grunde die Lösung auch dem Anfänger keine Schwierigkeit bieten darf. An einzelnen Stellen habe ich schwierigere Übungen gegeben, dann aber auch eine Anleitung zur Lösung beigefügt.

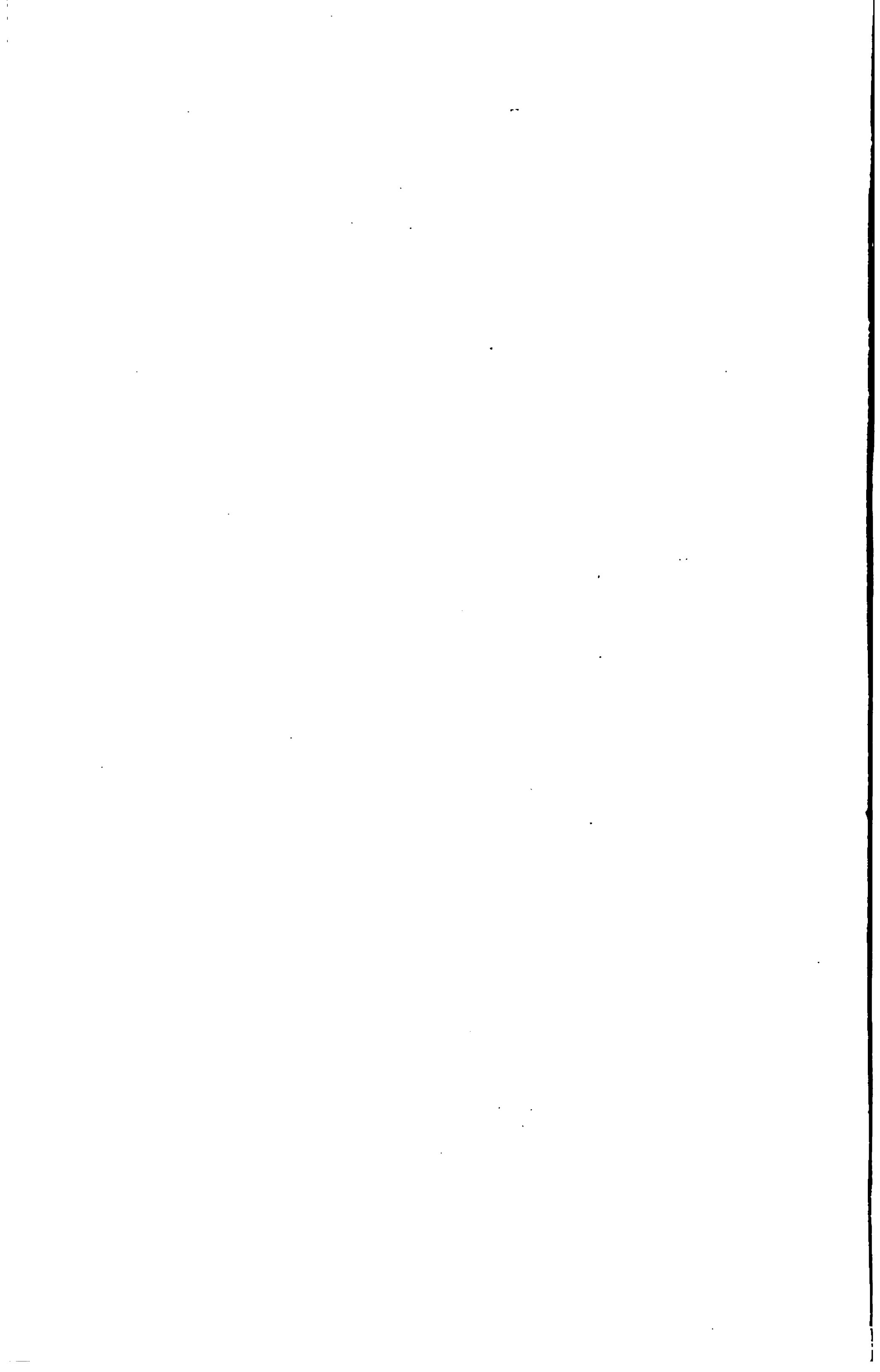
Dem ersten Teile, welcher die Geometrie der Ebene behandelt, habe ich zahlreiche Figuren beigegeben. Das schien mir für den zweiten Teil, die Geometrie des Raumes, nicht notwendig. Bei der engen Beziehung, in der die beiden Teile zu einander stehen, erleichtert der Vergleich mit der entsprechenden ebenen Figur das Verständnis weit mehr, als eine noch so gute Zeichnung es vermag. Für die Flächen zweiter Ordnung können zudem meines Erachtens Modelle nicht entbehrt werden, und diese werden von der Firma Schilling in Halle a. d. S. zu einem so billigen Preise geliefert, dafs der Studierende sie auch bei seinen häuslichen Studien zur Hand haben kann.

Münster i. W., 9. Juni 1900.

W. Killing.



Inhaltsverzeichnis.



§ 1.

Theorie der Doppelverhältnisse.

1. Wenn drei Punkte A, B, C in gerader Linie liegen, so sagt man, ohne Rücksicht auf die gegenseitige Lage der drei Punkte, die Strecke AB werde durch den Punkt C in die beiden Teile AC und CB zerlegt, weil unter Berücksichtigung der Vorzeichen immer $AC + CB = AB$ ist. Dabei bezeichnet man den Bruch $AC : CB$ als das Schnittverhältnis, nach welchem die Strecke AB im Punkte C geteilt wird.

Liegt C zwischen A und B, so haben AC und CB dasselbe Vorzeichen; daher ist für jeden Punkt C der Strecke AB das Schnittverhältnis positiv. Speciell ist das Schnittverhältnis gleich eins, wenn C mit der Mitte von AB zusammenfällt.

Für einen Punkt C, der in der Verlängerung über B hinaus liegt, haben AC und CB verschiedenes Zeichen; das Schnittverhältnis hat einen negativen Wert, der dem absoluten Betrage nach gröfser ist als eins; es ist in diesem Falle $AC : CB < -1$. Wenn aber endlich C auf der Verlängerung der Strecke BA über A hinaus liegt, so ist $0 > AC : CB > -1$.

2. Das Verhältnis, nach welchem die Strecke AB im Punkte C geteilt wird, wird seinem absoluten Betrage nach auch erhalten, wenn man von den Endpunkten A und B auf eine beliebige durch den teilenden Punkt C gelegte Gerade die Senkrechten AM und BM fällt. Dann ist der Bruch $AC : CB$, abgesehen vom Vorzeichen, gleich $AM : MB$.

3. Wenn die vier Punkte A, B, C, D in gerader Linie liegen, so wird die Strecke AB sowohl in C wie in D nach einem gewissen Verhältnisse geteilt. Den Quotienten aus diesen beiden

Verhältnissen nennen wir das Doppelverhältnis der vier Punkte A, B, C, D und bezeichnen ihn durch (ABCD). Es ist daher:

$$(1)\quad (ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Wenn das Doppelverhältnis den Wert -1 hat, wenn also

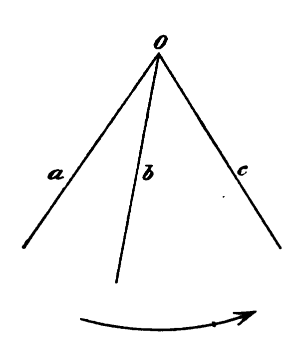
$$(2)\quad \frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$$

ist, so sagen wir, die vier Punkte lägen harmonisch. Wir gebrauchen in diesem Falle auch den Ausdruck, die Strecke AB werde in den Punkten C und D harmonisch geteilt, oder die Punkte C und D seien einander in Bezug auf die Strecke AB harmonisch zugeordnet. Da aus der Gleichung (2) die Gleichung folgt:

$$\frac{CA}{AD} = -\frac{CB}{BD},$$

so wird, falls die Strecke AB in den Punkten C und D harmonisch geteilt wird, auch die Strecke CD in A und B harmonisch geteilt.

4. Den Winkel zweier von demselben Punkte O ausgehenden Strahlen (Halbgeraden) a und b bezeichnen wir mit (ab). Dabei denken wir von vornherein den Sinn festgelegt, nach welchem der Strahl a um O gedreht werden mufs, bis er mit dem zweiten Schenkel b zusammenfällt.



Sind in der Ebene drei von demselben Punkte ausgehende Strahlen a, b, c gegeben, so sagen wir, der Winkel (ab) werde durch den Strahl c in die Winkel (ac) und (cb) geteilt, und bezeichnen den Bruch $\frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$ als das Schnittverhältnis der Teilung.

Neben den Strahlen a, b, c ist es von Vorteil, auch die entgegengesetzten Strahlen a′, b′, c′ zu betrachten, also diejenigen Strahlen, welche der Reihe nach mit a, b, c je in gerader Linie liegen. Dann ist (ac′) entweder gleich: $(ac) + \pi$ oder gleich: $(ac) - \pi$; ebenso ist (c′b) entweder $= (cb) + \pi$

oder $= (cb) - \pi$ u. s. w. Demnach ist $\sin(ac') = -\sin(ac)$, $\sin(c'b) = -\sin(cb)$. Das Schnittverhältnis ändert sich somit nicht, wenn man statt des teilenden Strahles c den entgegengesetzten Strahl c' nimmt und die beiden Strahlen a und b beibehält. Dagegen behält das Schnittverhältnis den absoluten Betrag, wechselt aber das Vorzeichen, wenn man etwa den Strahl a durch a' ersetzt.

Wenn der teilende Strahl c im Winkelfelde (ab) oder im Felde des Scheitelwinkels (a'b') liegt, so ist das Schnittverhältnis positiv. Liegt aber der Strahl c im Felde eines Nebenwinkels von (ab), so hat das Schnittverhältnis einen negativen Wert.

5. Um das Schnittverhältnis der Teilung eines Winkels ohne Rücksicht auf das Zeichen darzustellen, kann man von einem beliebigen Punkte des teilenden Strahles c die Senkrechten auf die Schenkel a und b fällen. Ist C ein beliebiger Punkt von c, und steht CA auf a, CB auf b senkrecht, so ist, abgesehen vom Vorzeichen, das Schnittverhältnis gleich dem Bruche CA : CB.

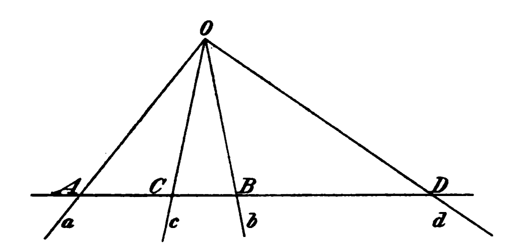
6. Den Quotienten aus den Verhältnissen, nach denen ein Winkel durch zwei verschiedene vom Scheitel ausgehende Strahlen geteilt wird, nennt man das Doppelverhältnis der vier Strahlen. Wird der Winkel (ab) erst durch c und dann durch d geteilt, so bezeichnet man das entsprechende Doppelverhältnis durch (abcd). Die vier Strahlen können auch durch den gemeinschaftlichen Scheitel O und je einen Punkt gegeben sein; für das Doppelverhältnis der vier Strahlen OA, OB, OC, OD gebraucht man das Zeichen (O : ABCD). Demnach ist

$$(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(db)},$$

$$(O : ABCD) = \frac{\sin AOC}{\sin COB} : \frac{\sin AOD}{\sin DOB}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, dafs das Doppelverhältnis sich nicht ändert, wenn man irgend einen der vier Strahlen durch den entgegengesetzten Strahl ersetzt. Man darf daher auch vom Doppelverhältnis von vier geraden Linien sprechen.

7. Die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit vier von einem Punkte ausgehenden Strahlen haben dasselbe Doppelverhältnis wie die Strahlen selbst.



Zunächst überzeugt man sich leicht, dafs die Doppelverhältnisse (ABCD) und (O : ABCD) dasselbe Vorzeichen haben. Was aber die absoluten Werte betrifft, so ist:

$$\frac{AC}{AO} = \frac{\sin AOC}{\sin ACO}, \quad \frac{CB}{BO} = \frac{\sin COB}{\sin BCO},$$

also

$$\frac{\sin AOC}{\sin COB} = \frac{AC \,.\, BO}{CB \,.\, AO}.$$

Ebenso ist

$$\frac{\sin AOD}{\sin DOB} = \frac{AD \,.\, BO}{DB \,.\, AO},$$

und somit folgt durch Division:

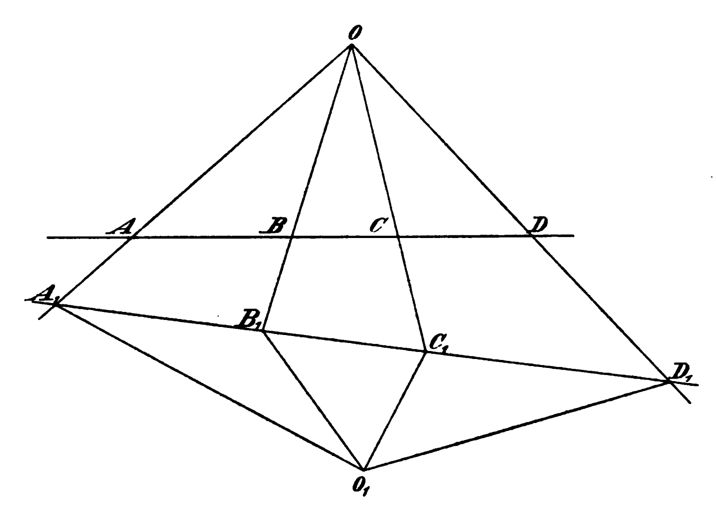
$$\frac{\sin AOC}{\sin COB} : \frac{\sin AOD}{\sin DOB} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$$

oder (O : ABCD) = (ABCD).

8. Dieser Lehrsatz ermöglicht es uns, nachdem vier Punkte einer Geraden oder vier durch einen Punkt gehende Gerade (vier Strahlen eines Büschels) gegeben sind, beliebig viele Quadrupel zu konstruieren, deren Elemente dasselbe Doppelverhältnis zu einander haben. Sind z. B. die vier Punkte A, B, C, D gegeben, so kann man von einem beliebigen Punkte O die vier Geraden OA, OB, OC, OD ziehen; diese haben dasselbe Doppelverhältnis wie die vier Punkte. Man kann aber jetzt die vier Geraden OA, OB, OC, OD durch eine beliebige Transversale in den vier Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 durchschneiden; dann ist auch

$$(ABCD) = (A_1 B_1 C_1 D_1).$$

Die letzten vier Punkte kann man wieder mit einem beliebigen Punkte O_1 verbinden und dadurch vier neue Strahlen erhalten, für welche das Doppelverhältnis denselben Wert hat.



Um diese doppelte Art, aus vier gegebenen Elementen weitere Quadrupel mit demselben Doppelverhältnisse herzuleiten, kurz auszusprechen, sagt man vielfach, die Gröfse eines Doppelverhältnisses bleibe beim Schneiden und Projizieren unverändert.

9.[1] Die Gesamtheit der in der Ebene von einem Punkte ausgehenden Geraden nennt man einen Strahlenbüschel, die Gesamtheit der in einer Geraden liegenden Punkte eine Punktreihe.

Man sagt, eine Punktreihe sei einem Strahlenbüschel perspektiv zugeordnet, wenn man jedem Strahle des Büschels seinen Schnittpunkt mit dem Träger der Punktreihe zuordnet. Läfst man einen Strahl a sich um einen festen Punkt O drehen und ordnet ihm in der Geraden g denjenigen Punkt α zu, in welchem diese vom Strahle a geschnitten wird, so ist durch die Festsetzung eine perspektive Zuordnung der Punkte α von g zu den Geraden a des Büschels O bestimmt.

Zwei Punktreihen heifsen einander perspektiv zugeordnet, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt gehen. Es seien die geraden Linien g und g' gegeben; man nehme einen Punkt O hinzu, der auf keiner von ihnen liegt, und ordne einem Punkte α der Geraden g den-

[1] Der Schlufs des § darf anfangs überschlagen werden.

jenigen Punkt von g' zu, in welchem diese Gerade von der Verbindungslinie $\alpha O'$ geschnitten wird.

Endlich kann man die Strahlen des Punktes O denen eines zweiten Punktes O' perspektiv zuordnen. Zu dem Ende nehme man eine Gerade g hinzu und lasse diejenigen beiden Strahlen der Büschel einander entsprechen, welche durch denselben Punkt der Geraden hindurchgehen. Ist α ein beliebiger Punkt von g, so soll dem Strahle $O\alpha$ des Büschels O der Strahl $O'\alpha$ des Büschels O' entsprechen. Auf diese Weise sind die Strahlen der Büschel einander perspektiv zugeordnet.

10. Hiernach können wir den in 7. bewiesenen Lehrsatz auch in folgender Weise aussprechen:

Wenn eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel einander perspektiv zugeordnet sind, so haben irgend vier Punkte der Punktreihe dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Geraden des Büschels.

In zwei perspektiven Strahlenbüscheln haben irgend vier Strahlen des einen dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Strahlen des andern.

Irgend vier Punkte einer Punktreihe haben dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden Punkte in einer perspektivisch zugeordneten Punktreihe.

Indem wir Punktreihe und Strahlenbüschel mit dem gemeinsamen Namen »einstufige ebene Gebilde« belegen, lassen sich die letzten Sätze in folgendem Ausspruch zusammenfassen:

In zwei perspektiven einstufigen Gebilden haben irgend vier Elemente des einen dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Elemente des andern.

Übungen:

1) Man suche den vierten harmonischen Punkt zu drei Punkten einer Geraden.

2) Jeder Winkel wird durch seine Halbierungslinie und die Halbierungslinie seines Nebenwinkels harmonisch geteilt; wenn umgekehrt von zwei harmonisch zugeordneten Strahlenpaaren die Geraden des einen auf einander senkrecht stehen, so halbieren sie die von den Geraden des anderen Paares gebildeten Winkel.

3) Drei Punkte einer geraden Linie kann man in sechsfacher Weise anordnen und zu jeder Anordnung den vierten harmo-

nischen Punkt konstruieren; wieviel Punkte erhält man auf diese Weise?

4) Durch drei Punkte einer geraden Linie werden sechs Schnittverhältnisse bestimmt; wenn eines derselben gleich λ gesetzt wird, so haben die fünf andern die Werte:

$$\frac{1}{\lambda}, \quad -1-\lambda, \quad -\frac{1}{\lambda+1}, \quad -\frac{\lambda+1}{\lambda}, \quad -\frac{\lambda}{\lambda+1}.$$

5) Der vorstehende Satz gilt nicht für das Schnittverhältnis dreier Strahlen eines Punktes.

6) Ein Doppelverhältnis ändert sich nicht, wenn man das erste Paar der Elemente mit dem zweiten Paare vertauscht: $(ABCD) = (CDAB)$.

7) Jedes Doppelverhältnis geht in seinen reciproken Wert über, wenn man entweder die beiden ersten oder die beiden letzten Elemente mit einander vertauscht. Setzt man $(ABCD) = \lambda$, so ist $(BACD) = (ABDC) = \frac{1}{\lambda}$.

8) Ein Doppelverhältnis ändert sich nicht, wenn man sowohl die beiden ersten wie die beiden letzten Elemente mit einander vertauscht: $(ABCD) = (BADC)$.

9) Vertauscht man die beiden mittleren Elemente eines Doppelverhältnisses mit einander, so erhält man ein Doppelverhältnis, welches zu dem gegebenen addiert die Summe eins liefert: $(ABCD) + (ACBD) = 1$.

10) Durch vier Punkte einer geraden Linie oder vier Strahlen eines Büschels sind 24 Doppelverhältnisse bestimmt, entsprechend den 24 Permutationen, die aus den vier Elementen gebildet werden können; diese sind zu je vier einander gleich. Für vier Punkte einer geraden Linie bestehen die Beziehungen:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = \lambda$$
$$(ABDC) = (BACD) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{1}{\lambda}$$
$$(ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA) = 1-\lambda$$
$$(ACDB) = (BDCA) = (CABD) = (DBAC) = \frac{1}{1-\lambda}$$
$$(ADCB) = (BCDA) = (CBAD) = (DABC) = \frac{\lambda}{\lambda-1}$$
$$(ADBC) = (BCAD) = (CBDA) = (DACB) = \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

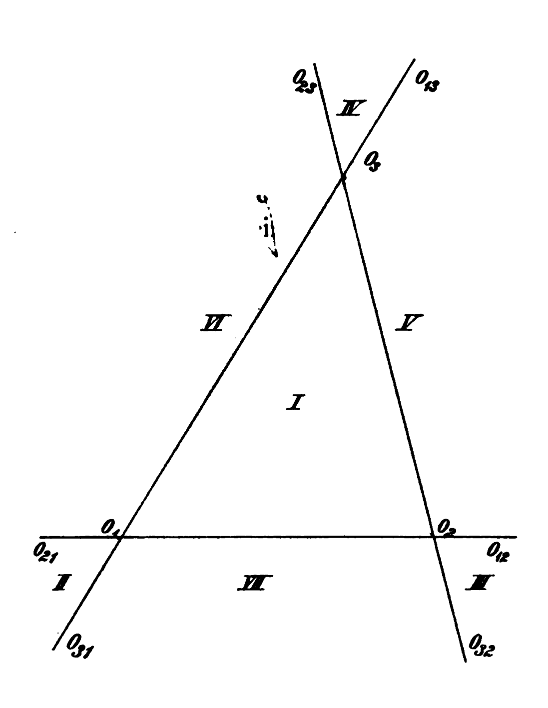
§ 2.

Das Koordinatendreieck.

1. Die Cartesischen Koordinaten, deren Wesen hier als bekannt vorausgesetzt wird, lassen sich sehr einfach einführen und erweisen sich für zahlreiche Untersuchungen als das geeignetste Werkzeug, geometrische Beziehungen der Rechnung zu unterziehen. Daher werden sie nicht nur in den Elementen der analytischen Geometrie ausschliefslich benutzt, sondern können auch für tiefer gehende Forschungen vielfach nicht entbehrt werden. Gewisse Eigenschaften der Figuren ergeben sich aber am einfachsten und natürlichsten, wenn man ein anderes Koordinatensystem benutzt, auf welches die Wissenschaft ziemlich spät und nur allmählich geführt worden ist. Es sind dies, wie wir hier wenigstens andeuten wollen, solche Eigenschaften, bei denen es mehr auf die gegenseitige Lage der Gebilde, als auf die Gröfse der Strecken, Winkel und Flächen ankommt. Dies neue System besitzt in seinen Anwendungen mancherlei Vorzüge, welche den Cartesischen Koordinaten abgehen; auch ist es weit allgemeiner und begreift das von Descartes eingeführte System als besondern Fall unter sich. Aber es ist nicht gerade leicht, in dasselbe einzudringen. Wir wollen daher die drei folgenden Paragraphen zur Vorbereitung benutzen und das allgemeine System erst in § 5 aufstellen.

2. Durch eine jede gerade Linie wird die Ebene in zwei Teile zerlegt. Um diese von einander zu unterscheiden, bezeichnen wir den einen als den positiven, den andern als den negativen Teil der Ebene in Bezug auf die Gerade. Von einem beliebigen Punkte der Ebene fällen wir die Senkrechte auf die Gerade und versehen deren Länge mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, jenachdem der Punkt dem positiven oder negativen Teile angehört. Dementsprechend unterscheiden wir auch einen positiven und einen negativen Abstand eines Punktes von einer Geraden. Indem wir dem Abstande in dieser Weise ein Vorzeichen beilegen, wird die Lage eines Punktes, der von einer gegebenen Geraden den Abstand a hat, auf eine einzige Gerade beschränkt, während die Punkte einer zweiten Geraden den Abstand $-a$ von der gegebenen Geraden besitzen.

3. Jetzt sei in der Ebene ein Dreieck $O_1O_2O_3$ gegeben. Da wir dasselbe zur Bestimmung der Lage eines jeden Punktes gebrauchen wollen, so soll es das Koordinatendreieck heifsen. Wir verlängern die drei Seiten unbegrenzt nach beiden Richtungen. Einen Punkt der Geraden O_1O_2, der in der Verlängerung über O_2 hinaus liegt, nennen wir O_{12}, und ebenso möge ein Punkt dieser Geraden, der in der Verlängerung über O_1 hinaus liegt, mit O_{21} bezeichnet werden. In gleicher Weise führe man die Punkte O_{31} und O_{13}, O_{23} und O_{32} ein. Aufser dem Innern des Dreiecks giebt es noch sechs andere Teile der Ebene, welche durch die drei Geraden gegen die übrige Ebene abgegrenzt werden. In das Feld des Winkels $O_{21}O_1O_{31}$ tritt die Linie O_2O_3 auch in ihrer Verlängerung nicht ein; jeder Scheitelwinkel zu einem Innenwinkel des Dreiecks $O_1O_2O_3$ begrenzt also für sich einen Teil der Ebene. Dagegen schliefst das Feld eines jeden Dreieckswinkels das Innere des Dreiecks ein; trennt man dies von dem Felde ab, so bleibt jedesmal ein Teil, der von einer Seite des Dreiecks und von Verlängerungen der beiden andern Seiten begrenzt wird; wir wollen jeden solchen Teil ein ungeschlossenes Dreiseit nennen.



Hiernach wird die Ebene durch die drei Geraden O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 in die folgenden sieben Teile zerlegt:

I. das Innere des Dreiecks $O_1O_2O_3$,

II. » Winkelfeld $O_{21}O_1O_{31}$,

III. das Winkelfeld $O_{32}O_2O_{12}$,
IV. » » $O_{13}O_3O_{23}$,
V. » ungeschlossene Dreiseit $O_{12}O_2O_3O_{13}$,
VI. » » » $O_{23}O_3O_1O_{21}$,
VII. » » » $O_{31}O_1O_2O_{32}$.

4. Um die Lage eines jeden Punktes in der Ebene zu bestimmen, fällen wir von ihm die drei Senkrechten auf die drei Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$; wir nennen p_1 die auf O_2O_3, p_2 die auf O_3O_1 und p_3 die auf O_1O_2 gefällte Senkrechte. Wir wollen den Punkt, von dem aus die Senkrechten p_1, p_2, p_3 auf die drei Seiten des Koordinatendreiecks gefällt werden können, den Punkt (p_1, p_2, p_3) oder auch kurz den Punkt (p) nennen. Für alle Punkte der geraden Linie O_2O_3 ist $p_1 = 0$; ebenso ist $p_2 = 0$ für die Punkte der Geraden O_3O_1, und $p_3 = 0$ für die der Geraden O_1O_2.

Wenn wir, wie im folgenden immer geschehen soll, die Höhen des Dreiecks $O_1O_2O_3$ der Reihe nach h_1, h_2, h_3 nennen, so ist für den Punkt O_1

$$p_1 = h_1,\ p_2 = p_3 = 0;$$

ebenso ist für den Punkt O_2

$$p_2 = h_2,\ p_3 = p_1 = 0,$$

und für den Punkt O_3

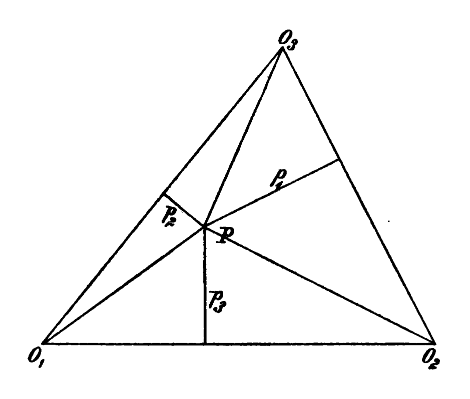
$$p_3 = h_3,\ p_1 = p_2 = 0.$$

5. In Bezug auf jede der drei Geraden O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 soll derjenige Teil der Ebene als der positive betrachtet werden, dem das Innere des Dreiecks angehört. Somit haben die Senkrechten p_1, p_2, p_3 für alle Punkte im Innern des Dreiecks ein positives Vorzeichen. Ändert der Punkt stetig seine Lage, so erleiden auch die einzelnen Senkrechten stetige Änderungen. Wenn hierbei der Punkt auf die andere Seite von O_2O_3 übertritt, so nimmt auch die Senkrechte p_1 das entgegengesetzte Vorzeichen an. Dasselbe gilt für p_2 beim Hindurchgange durch O_1O_3 und für p_3 beim Hindurchgange durch O_1O_2. Demnach ergeben sich für die sieben Teile der Ebene folgende Kombinationen der Vorzeichen:

	p_1	p_2	p_3
I	+	+	+
II	+	−	−

	p_1	p_2	p_3
III	$-$	$+$	$-$
IV	$-$	$-$	$+$
V	$-$	$+$	$+$
VI	$+$	$-$	$+$
VII	$+$	$+$	$-$.

6. Wenn von den drei Senkrechten p_1, p_1, p_3, die vom Punkte P auf die Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$ gefällt werden können, zwei gegeben sind, so ist auch die dritte bekannt. Es mufs also zwischen diesen Senkrechten eine Relation bestehen. Diese finden wir am leichtesten, wenn der Punkt P im Innern des Dreiecks liegt. Ziehen wir in diesem Falle von P aus die geraden Strecken nach den Eckpunkten des Dreiecks, so zerlegt sich dasselbe in die Summe der drei Dreiecke $O_2 O_3 P$, $O_3 O_1 P$ und $O_1 O_2 P$. Von diesen hat jedes eine Seite des gegebenen Dreiecks zur Grundlinie und die entsprechende Senkrechte zur Höhe. Indem wir noch



$O_2O_3 = a_1$, $O_3O_1 = a_2$, $O_1O_2 = a_3$ und den Inhalt des Dreiecks $O_1O_2O_3$ gleich $\triangle$ setzen, erhalten wir die Gleichung

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 2\triangle$$

oder

$$\frac{a_1}{2\triangle} p_1 + \frac{a_2}{2\triangle} p_2 + \frac{a_3}{2\triangle} p_3 = 1.$$

Nun ist $2\triangle = a_1 h_1 = a_2 h_2 = a_3 h_3$ oder

$$\frac{2\triangle}{a_1} = h_1, \quad \frac{2\triangle}{a_2} = h_2, \quad \frac{2\triangle}{a_3} = h_3.$$

Demnach besteht zwischen den drei Senkrechten p_1, p_2, p_3 die Beziehung:

$$(1) \quad \frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1.$$

Diese Gleichung ändert sich aber nicht, wenn der Punkt P irgend eine andere Lage annimmt. Wenn z. B. der Punkt P dem Raumteile VI angehört, so besteht zwischen den Flächenräumen der Dreiecke, welche man durch Verbindung von P mit den Eckpunkten des Dreiecks erhält, die Beziehung:

$$O_2O_3P - O_3O_1P + O_1O_2P = O_1O_2O_3.$$

Jetzt haben aber p_1 und p_3 ein positives, p_2 ein negatives Vorzeichen, und da wir in der vorstehenden Formel jeden Flächeninhalt positiv genommen haben, so ist

$$2O_3O_1P = -a_2p_2,\ 2O_2O_3P = a_1p_1,\ 2O_3O_1P = a_2p_2.$$

Daher ändert sich die Gleichung (1) bei dieser Wahl des Punktes P nicht. Auch wenn der Punkt P etwa im Raumteile II liegt, tritt keine Änderung ein, weil einerseits die Relation besteht:

$$O_2O_3P - O_3O_1P - O_1O_2P = O_1O_2O_3,$$

andererseits jetzt die Senkrechte p_1 mit einem positiven, die Senkrechten p_2 und p_3 mit einem negativen Vorzeichen versehen sind. Auf diese Weise überzeugt man sich, dafs die Gleichung (1) allgemein gültig ist.

Übungen:

1) Man bestimme die drei Senkrechten p_1, p_2, p_3
   a) für die Mitten der drei Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$,
   b) für die Mittelpunkte der vier Berührungspunkte des Dreiecks,
   c) für den Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises,
   d) für den Schwerpunkt des Dreiecks,
   e) für die drei Punkte, von denen jeder die Eigenschaft hat, in Verbindung mit den drei Punkten O_1, O_2, O_3 die Ecken eines Parallelogramms zu bilden.

2) In welcher Beziehung stehen einige dieser Senkrechten zu einander, wenn der Punkt P der Halbierungslinie eines Innenwinkels des gegebenen Dreiecks angehört?

(Für welche Punkte wird $p_2 = p_3$ sein?)

3) In welcher Beziehung stehen die Senkrechten, wenn der Punkt auf der Halbierungslinie eines Aufsenwinkels liegt?

§ 3.

Die gerade Linie.

1. Liegen die drei Punkte 0, 1, 2 in gerader Linie, so stellt der Bruch $\lambda = \frac{01}{12}$, worin die einzelnen Strecken durch Nebeneinanderstellen der Nummern bezeichnet sind, das Schnittverhältnis dar, nach welchem die Strecke 02 im Punkte 1 geteilt wird. Wenn man aber von diesen drei Punkten aus die Senkrechten p, p', p″ auf eine beliebige Gerade der Ebene fällt, so gilt die Gleichung:

$$\frac{p' - p}{p'' - p'} = \frac{01}{12} = \lambda.$$

Daraus folgt:

$$(1) \quad p = (1 + \lambda)\, p' - \lambda p''.$$

Zugleich ist $1 + \lambda = \frac{02}{12}$; also stellt $\frac{-\lambda}{1 + \lambda} = \frac{10}{02}$ das Schnittverhältnis dar, nach welchem die Strecke 12 im Punkte 0 geteilt wird.

2. Wir nennen die vom Punkte 0 auf die Seiten des Koordinatendreiecks gefällten Senkrechten p_1, p_2, p_3; ebenso sollen die vom Punkte 1 auf diese Linien gefällten Senkrechten mit p_1', p_2', p_3' und die vom Punkte 2 gefällten Senkrechten mit p_1'', p_2'', p_3'' bezeichnet werden. Dann folgen aus (1) die drei Gleichungen:

$$(2) \quad \begin{aligned} p_1 &= (1 + \lambda)\, p_1' - \lambda p_1'' \\ p_2 &= (1 + \lambda)\, p_2' - \lambda p_2'' \\ p_3 &= (1 + \lambda)\, p_3' - \lambda p_3'', \end{aligned}$$

wo λ die angegebene Bedeutung hat. Zugleich ist der Bruch $-\lambda : (1 + \lambda)$ das Verhältnis, nach welchem die Strecke 12 im Punkte 0 geteilt wird.

Haben die Punkte 1 und 2 eine feste Lage, so kann man für jeden Punkt der hindurchgehenden Geraden die Gleichungen (2) bilden; dabei wird nur λ den Wert ändern, wenn man statt des Punktes 0 einen andern Punkt der Geraden 12 wählt. Indem

man für den Augenblick $A = 1$, $B = -1 - \lambda$, $C = \lambda$ setzt, kann man die Gleichungen (2) auch in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned} Ap_1 + Bp_1' + Cp_1'' &= 0 \\ Ap_2 + Bp_2' + Cp_2'' &= 0 \\ Ap_3 + Bp_3' + Cp_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können aber, wie man aus den ersten Elementen der Determinantenlehre weifs, nur zusammenbestehen, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$(3) \quad \begin{vmatrix} p_1 & p_1' & p_1'' \\ p_2 & p_2' & p_2'' \\ p_3 & p_3' & p_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung mufs befriedigt werden, wenn der Punkt (p_1, p_2, p_3) mit den Punkten (p_1', p_2', p_3') und (p_1'', p_2'', p_3'') in gerader Linie liegt. Man nennt sie deshalb die Gleichung derjenigen geraden Linie, welche durch die Punkte 1 und 2 gelegt werden kann.

Setzt man

$$a_1 = p_2' p_3'' - p_3' p_2'', \; a_2 = p_3' p_1'' - p_1' p_3'',$$
$$a_3 = p_1' p_2'' - p_2' p_1'',$$

so kann man die Gleichung (3) auch in der Form schreiben:

$$(4) \quad a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0.$$

Da die Punkte 1 und 2 feste Lage haben sollen, sind die Koefficienten a_1, a_2, a_3 konstante Gröfsen. Daher ist die Gleichung einer jeden Geraden homogen vom ersten Grade oder homogen linear in den Senkrechten p_1, p_2, p_3.

3. Dasselbe Ergebnis gewinnen wir auch auf einem andern Wege, der zwar etwas weitläufiger ist, aber zugleich noch andere wichtige Resultate liefert. Zu dem Ende gehen wir von der Formel aus:

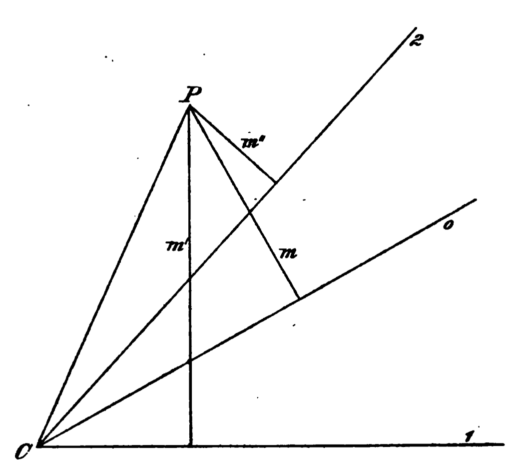
$$(5) \quad \sin\alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin\beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin\gamma \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Die Richtigkeit derselben beweisen wir, indem wir für die Sinus der Differenzen ihre bekannten Ausdrücke einsetzen. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \sin\alpha \sin(\beta - \gamma) &= \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \sin\gamma \sin\alpha \cos\beta \\ \sin\beta \sin(\gamma - \alpha) &= \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha - \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \\ \sin\gamma \sin(\alpha - \beta) &= \sin\gamma \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \sin\gamma \cos\alpha. \end{aligned}$$

Hier verschwindet die Summe der auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke, also auch die Summe der linken Seiten, wodurch unsere Formel als richtig erwiesen ist.

4. Lassen wir jetzt von einem Punkte C drei Strahlen 0, 1, 2 ausgehen und bezeichnen wir die Winkel, welche diese drei



Strahlen in einer festgesetzten Drehungsrichtung mit dem nach einem Punkte P gezogenen Strahle CP bilden, der Reihe nach mit α, β, γ, so wenden wir auf diese Figur die mit $r = CP$ multiplizierte Formel (5) an. Indem wir noch die drei Senkrechten, welche vom Punkte P auf die drei Geraden 0, 1, 2 gefällt werden, der Reihe nach mit m, m′, m″ bezeichnen, geht aus (5) die Relation hervor:

$$m \sin(\beta - \gamma) + m' \sin(\gamma - \alpha) + m'' \sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Hier stellt $\beta - \gamma$ den Winkel dar, den die Strahlen 1 und 2 mit einander bilden; ebenso ist $\gamma - \alpha$ der Winkel (20) und $\alpha - \beta$ der Winkel (01). Die vorstehende Gleichung können wir daher auch in folgender Weise schreiben:

$$(6) \quad m \sin(12) + m' \sin(20) + m'' \sin(01) = 0.$$

Setzen wir noch

$$-\frac{\sin(20)}{\sin(12)} = \varrho, \quad -\frac{\sin(01)}{\sin(12)} = \sigma,$$

so nimmt die Gleichung (6) auch die Gestalt an:

$$(7) \quad m = \varrho m' + \sigma m''.$$

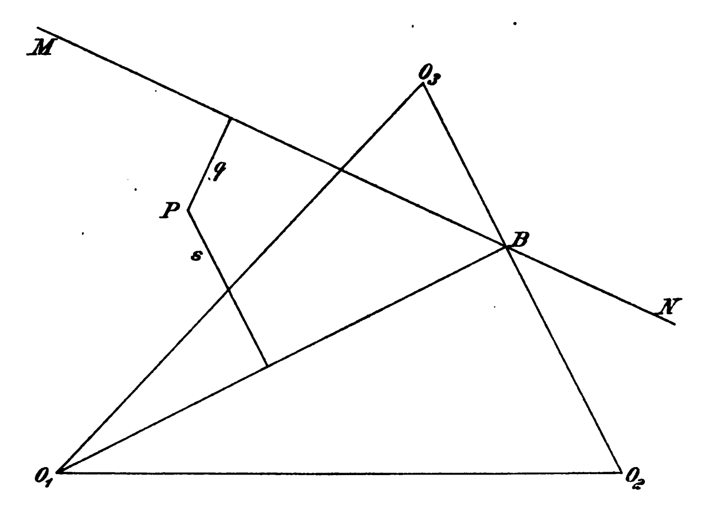
Hierin ändern sich die Koefficienten ϱ und σ nicht, wenn man die Senkrechten von irgend einem andern Punkte der Ebene auf die drei Geraden fällt. Wir wollen noch beachten, dafs der Quotient $\sigma : \varrho$ gleich $\sin(10) : \sin(02)$ ist, also das Schnittverhältnis darstellt, nach welchem der Winkel (12) durch die Gerade 0 geteilt wird.

5. Die Gleichung (7) wenden wir auf die beiden vom Punkte O_1 ausgehenden Geraden O_1O_2 und O_1O_3, und auf eine dritte durch den Punkt O_1 gelegte Gerade O_1S an. Die von einem beliebigen Punkte P auf O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 gefällten Senkrechten sollen wieder mit p_1, p_2, p_3 bezeichnet werden, während die von P auf O_1S gefällte Senkrechte gleich s gesetzt werden soll. Dann ist

$$s = \varrho p_2 + \sigma p_3,$$

wo ϱ und σ nur von den Winkeln abhangen, welche die drei Geraden O_1O_2, O_1O_3 und O_1S mit einander bilden.

Wir gehen jetzt zu einer beliebigen Geraden MN über, welche die Seite O_2O_3 in einem Punkte B treffen möge. Diesen Punkt



verbinden wir mit O_1 durch die Gerade O_1B und nennen q die Senkrechte, welche von einem beliebigen Punkte $P = (p_1, p_2, p_3)$ auf MN gefällt wird, und nennen s die von P auf O_1B gefällte Senkrechte. Da durch den Punkt O_1 die drei Geraden O_1O_2,

O_1O_3 und O_1B geben, so ist $s = \varrho p_2 + \sigma p_3$; aus demselben Grunde ist $q = \mu p_1 + \nu s$. Daraus ergiebt sich

$$(7) \quad q = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3,$$

wo ist $a_1 = \mu$, $a_2 = \nu\varrho$, $a_3 = \nu\sigma$.

Nun hangen die Koefficienten μ, ν, ϱ, σ nur von der gegenseitigen Lage der geraden Linien ab; also stellt die Gleichung (7) eine Beziehung zwischen den vier Senkrechten ab, die man von einem beliebigen Punkte der Ebene auf die vier Geraden fällen kann.

6. Statt die Bedeutung der Koefficienten a_1, a_2, a_3 vermittelst der Werte von μ, ν, ϱ, σ zu berechnen, dürfen wir sie aus speciellen Lagen des Punktes P herleiten. Indem wir die von den Punkten O_1, O_2, O_3 auf die Geraden MN gefällten Senkrechten mit r_1, r_2, r_3 bezeichnen, haben wir in der Gleichung (7), falls wir den Punkt P mit O_1 zusammenfallen lassen, $q = r_1$, $p_1 = h_1$, $p_2 = p_3 = 0$ zu setzen. Demnach gilt die Gleichung: $r_1 = a_1 h_1$. Ebenso erhalten wir die Gleichungen $r_2 = a_2 h_2$ und $r_3 = a_3 h_3$, wenn wir P erst mit O_2 und dann mit O_3 zusammenfallen lassen. Indem wir die hieraus für a_1, a_2, a_3 hervorgehenden Werte in (7) einsetzen, nimmt die Gleichung die Form an:

$$(8) \quad q = \frac{r_1}{p_1} p_1 + \frac{r_2}{h_2} p_2 + \frac{r_3}{h_3} p_3,$$

worin h_1, h_2, h_3 die Höhen des Koordinatendreiecks, r_1, r_2, r_3 die von den Eckpunkten dieses Dreiecks auf die Gerade MN gefällte Senkrechte und p_1, p_2, p_3, q der Reihe nach die senkrechten Abstände eines beliebigen Punktes P von O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 und MN bezeichnen.

7. Wenn der Punkt P auf der Geraden MN liegt, so ist die Senkrechte q gleich null. Daher gilt für jeden Punkt dieser Geraden die Beziehung:

$$(9) \quad a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0$$

oder

$$(10) \quad \frac{r_1}{h_1} p_1 + \frac{r_2}{h_2} p_2 + \frac{r_3}{h_3} p_3 = 0.$$

Es ist dies die Gleichung derjenigen Geraden, für welche die senkrechten Abstände von den Ecken der Reihe nach gleich r_1, r_2, r_3 sind.

8. Die Gleichung (7) gestattet uns auch, das gegebene Koordinatendreieck $O_1O_2O_3$ durch ein anderes zu ersetzen und für jeden Punkt der Ebene die Senkrechten zu berechnen, welche von ihm aus auf die Seiten des neuen Dreiecks gefällt werden können.

Es seien p_1, p_2, p_3 die Senkrechten vom Punkte P auf die Geraden O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2; in gleicher Weise mögen die senkrechten Abstände des Punktes P von den Geraden Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 der Reihe nach mit q_1, q_2, q_3 bezeichnet werden. Dann ist der Gleichung (7) entsprechend:

$$\begin{aligned} q_1 &= a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 \\ (11) \quad q_2 &= a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 \\ q_3 &= a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3. \end{aligned}$$

Um die geometrische Bedeutung der neun Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ zu bestimmen, setze man die Senkrechten, welche vom Punkte O_1 auf die Seiten Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 gefällt werden können, bzw. gleich r_{11}, r_{21}, r_{31}; ebenso möge O_2 von diesen drei geraden Linien die senkrechten Abstände r_{12}, r_{22}, r_{32} und O_3 die Abstände r_{13}, r_{23}, r_{33} haben. Dann wird sein:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{r_{11}}{h_1}, \quad a_{12} = \frac{r_{12}}{h_2}, \quad a_{13} = \frac{r_{13}}{h_3}, \\ (12) \quad a_{21} &= \frac{r_{21}}{h_1}, \quad a_{22} = \frac{r_{22}}{h_2}, \quad a_{23} = \frac{r_{23}}{h_3}, \\ a_{31} &= \frac{r_{31}}{h_1}, \quad a_{32} = \frac{r_{32}}{h_2}, \quad a_{33} = \frac{r_{33}}{h_3}. \end{aligned}$$

Übungen:

1) Man entwickle in den Senkrechten p_1, p_2, p_3 die Gleichungen für folgende gerade Linien:

a) für die Halbierungslinien der Innen- und der Aufsenwinkel des Dreiecks $O_1O_2O_3$,

b) für die Mittellinien,

c) für die drei Geraden, von denen jede einen Eckpunkt des Dreiecks mit dem Punkte verbindet, in welchem die gegenüberliegende Seite durch den zugehörigen äufsern Berührungskreis berührt wird,

d) für die Höhen des Dreiecks.

2) Man beweise, dafs je durch einen Punkt gehen:

a) die Halbierungslinien der Innenwinkel eines Dreiecks,

b) die Halbierungslinien zweier Aufsenwinkel und des dritten Innenwinkels eines Dreiecks,
c) die drei Mittellinien,
d) die drei Höhen,
e) die drei Geraden, welche je von einer Ecke nach dem Berührungspunkte des zugehörigen äufsern Berührungskreises mit der Gegenseite gezogen werden.

3) Man beweise, dafs die drei Punkte, in denen je die Verlängerung einer Seite des Dreiecks durch die Halbierungslinie des gegenüberliegenden Aufsenwinkels getroffen wird, in gerader Linie liegen.

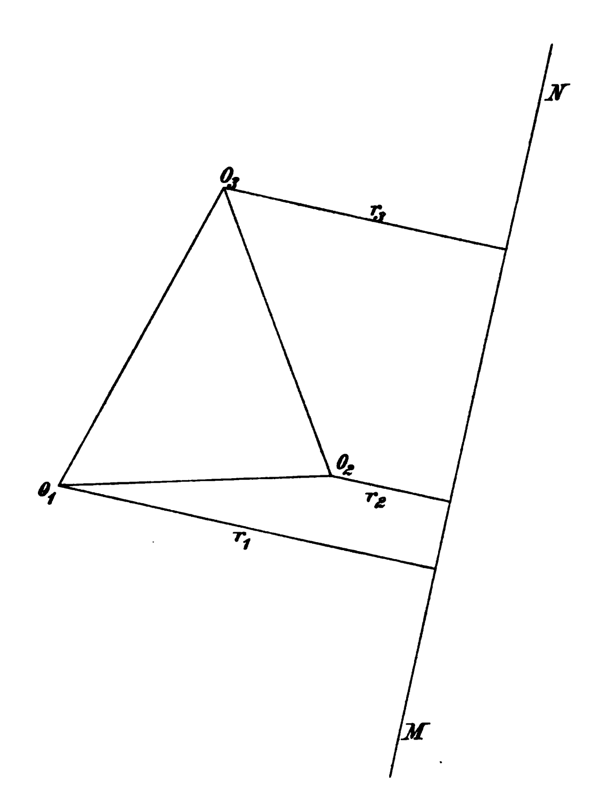
4) Man stelle die Gleichungen für folgende gerade Linien auf:
a) für die Verbindungslinien der Mitten von je zwei Seiten des Dreiecks,
b) für die in der Mitte einer Seite des Dreiecks auf ihr errichtete Senkrechte,
c) für die Geraden, welche je die Fufspunkte zweier Höhen des Dreiecks verbinden.

§ 4.

Die auf eine gerade Linie gefällten Senkrechten.

1. Auf eine in der Ebene gegebene Gerade fällen wir von den Eckpunkten O_1, O_2, O_3 des Koordinatendreiecks die drei Senkrechten r_1, r_2, r_3. Die Gerade liegt entweder ganz aufserhalb des Dreiecks oder sie tritt in dasselbe hinein und wieder heraus. Im ersten Falle liegen die drei Senkrechten gegen die Gerade auf derselben Seite; sie haben also dasselbe Vorzeichen. Wenn die Gerade aber in das Dreieck eintritt, so mufs sie zwei Seiten zwischen den Eckpunkten schneiden; die von demjenigen Eckpunkte ausgehende Senkrechte, in welchem die schneidenden Seiten zusammenstofsen, hat ein anderes Vorzeichen, als die von den beiden andern Eckpunkten gefällten Senkrechten. Daher sind hier vier Fälle zu unterscheiden:

I. die Gerade liegt aufserhalb des Dreiecks;
II. sie trifft die Seiten O_1O_2 und O_1O_3;
III. sie trifft die Seiten O_2O_1 und O_2O_3;
IV. sie trifft die Seiten O_3O_1 und O_3O_2.



Was die Vorzeichen betrifft, so überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit der folgenden Tabelle:

	r_1	r_2	r_3
I.	+	+	+
	−	−	−
II.	−	+	+
	+	−	−
III.	+	−	+
	−	+	−
IV.	+	+	−
	−	−	+.

Die Gerade, auf welche den angegebenen Festsetzungen entsprechend die Senkrechten r_1, r_2, r_3 gefällt sind, nennen wir die Gerade (r_1, r_2, r_3).

2. Legt man durch den Schnittpunkt der Geraden 1 und 2 eine Gerade 0 und fällt man von einem beliebigen Punkte die Senkrechten r', r'', r auf die Geraden 1, 2, 0, so darf man den in § 3, 4 (S. 15) bewiesenen Lehrsatz anwenden; es ist daher:

$$r = \varrho r' + \sigma r'',$$

wo ist $\varrho = -\frac{\sin(20)}{\sin(12)}$, $\sigma = -\frac{\sin(01)}{\sin(12)}$, $\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{\sin(10)}{\sin(02)}$.

Diesen Satz wenden wir auf die Senkrechten an, welche von den drei Eckpunkten O_1, O_2, O_3 des Koordinatendreiecks auf die drei Geraden gefällt sind. Zu der Geraden 0 mögen die Senkrechten r_1, r_2, r_3, zu der Geraden 1 die Senkrechten r_1', r_2', r_3' und zur Geraden 2 die Senkrechten r_1'', r_2'', r_3'' gehören. Dann ist:

$$\begin{aligned} & r_1 = \varrho r_1' + \sigma r_1'' \\ (6) \quad & r_2 = \varrho r_2' + \sigma r_2'' \\ & r_3 = \varrho r_3' + \sigma r_3'', \end{aligned}$$

wo ϱ und σ die angegebene Bedeutung haben.

Die Überlegung, welche wir angewandt haben, um von den Gleichungen (2) in § 3 zur Gleichung (3) § 3 zu gelangen, zeigt uns auch, dafs die Gleichungen (6) nur dann mit einander vereinbar sind, wenn die Relation besteht:

$$(7) \quad \begin{vmatrix} r_1 & r_1' & r_1'' \\ r_2 & r_2' & r_2'' \\ r_3 & r_3' & r_3'' \end{vmatrix} = 0.$$

Geben wir hierin den Gröfsen r_1', r_2', r_3' und r_1'', r_2'', r_3'' feste, aber den Gröfsen r_1, r_2, r_3 veränderliche Werte, so stellt die Gleichung (7) die Bedingung dar, unter welcher die Gerade (r_1, r_2, r_3) durch den festen Schnittpunkt der Geraden (r_1', r_2', r_3') und (r_1'', r_2'', r_3'') hindurchgeht; wir bezeichnen sie deshalb als die Gleichung des Punktes.

3. Dafs die Gleichung eines Punktes homogen linear in den Senkrechten r_1, r_2, r_3 ist, wollen wir noch auf eine andere Weise zeigen. Hierbei machen wir von dem in § 3, 1 (S. 13) entwickelten Satze Gebrauch, nach welchem zwischen den von drei in gerader Linie liegenden Punkten 0, 1, 2 auf eine beliebige Gerade gefällten Senkrechten t, t', t'' die Beziehung besteht:

$$t = (1 + \alpha) t' - \alpha t'',$$

wo α das Verhältnis ist, nach welchem die Strecke 02 im Punkte 1 geteilt wird.

Ist P ein beliebiger Punkt der Ebene, so bestimmen wir noch den Schnittpunkt Q der Geraden O_1P und O_2O_3. Von den fünf Punkten O_1, O_2, O_3, P, Q fällen wir die Senkrechten auf eine beliebige Gerade der Ebene und bezeichnen sie der Reihe nach mit r_1, r_2, r_3, s, t. Dann gilt, weil die Punkte O_2, O_3 und Q in gerader Linie liegen, die Gleichung:

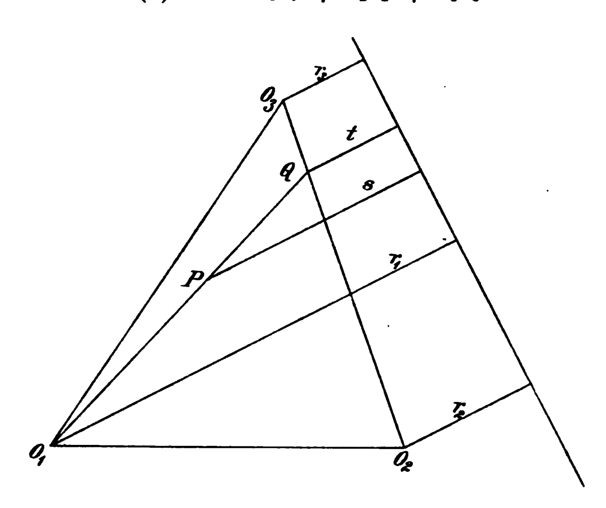
$$t = (1 + \alpha) r_2 - \alpha r_3,$$

und weil der Punkt P in der geraden Linie O_1Q liegt, mufs sein:

$$s = (1 + \beta) t - \beta r_1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$(8) \quad s = c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3.$$



Die Koefficienten in dieser Gleichung hangen nur von den Gröfsen α und β, also von der gegenseitigen Lage der Punkte ab; sie ändern sich also nicht, wenn man der Geraden, auf welche die Senkrechten gefällt werden, andere Lagen giebt. Ihre Bedeutung wird am leichtesten erkannt, wenn man diese Gerade der Reihe nach mit den Seiten des Koordinatendreiecks zusammenfallen läfst. Indem man nämlich die vom Punkte P auf diese Seiten gefällten Senkrechten wieder p_1, p_2, p_3 nennt, hat man nur zu beachten, dafs für die Gerade O_2O_3

$$r_1 = h_1, \ r_2 = r_3 = 0, \ s = p_1$$

und demnach $p_1 = c_1 h_1$ wird. Auf gleiche Weise ergiebt sich unter Benutzung der Geraden $O_3 O_1$ und der Geraden $O_1 O_2$, dafs $p_2 = c_2 h_2$ und $p_3 = c_3 h_3$ ist. Demnach geht die Gleichung (8) über in

$$(9) \quad s = \frac{p_1}{h_1} r_1 + \frac{p_2}{h_2} r_2 + \frac{p_3}{h_3} r_3.$$

Diese Gleichung ermöglicht es uns, den senkrechten Abstand des Punktes (p_1, p_2, p_3) von der Geraden (r_1, r_2, r_3) anzugeben. Geht speciell die Gerade (r_1, r_2, r_3) durch den Punkt (p_1, p_2, p_3) hindurch, so mufs die Senkrechte gleich null sein; die Bedingung, dafs die Gerade (r) durch den Punkt (p) hindurchgeht, ist also

$$(10) \quad \frac{p_1}{h_1} r_1 + \frac{p_2}{h_2} r_2 + \frac{p_3}{h_3} r_3 = 0.$$

Wir sehen somit wiederum, dafs die Gleichung des Punktes homogen linear in den Senkrechten r_1, r_2, r_3 ist; zugleich finden wir die geometrische Bedeutung für die Koefficienten in der Gleichung des Punktes.

4. Die soeben gefundene Gleichung (9) ist identisch mit der Gleichung (8) § 3, 6 (S. 17). In beiden Fällen finden wir, dafs der senkrechte Abstand eines Punktes (p) von der Geraden (r) gleich ist

$$\frac{p_1 r_1}{h_1} + \frac{p_2 r_2}{h_2} + \frac{p_3 r_3}{h_3}.$$

Nur betrachteten wir bei der früheren Herleitung die Gerade (r) als fest und den Punkt (p) als veränderlich, während wir umgekehrt in der soeben durchgeführten Betrachtung den Punkt (p) als fest und die Gerade (r) als veränderlich ansahen. Dieser Unterschied kann aber in der hergeleiteten Formel nicht mehr zu Tage treten.

Ebenso mufs die Gleichung (10) § 3, 7 identisch sein mit der letzten Gleichung (10), wie das in der Natur der Sache liegt. Wofern der Punkt (p) auf der Geraden (r) liegt, mufs auch die Gerade (r) durch den Punkt (p) gehen; wir müssen also für beide Forderungen dieselbe Bedingungsgleichung erhalten, und diese hat beidemal die Form:

$$\frac{p_1 r_1}{h_1} + \frac{p_2 r_2}{h_2} + \frac{p_3 r_3}{h_3} = 0.$$

5. Die Gleichung (8) gestattet es uns, nachdem die auf irgend eine Gerade von den drei Punkten O_1, O_2, O_3 gefällten Senkrechten bekannt sind, auch die Senkrechten s_1, s_2, s_3 zu berechnen, welche auf dieselbe Gerade von irgend drei andern Punkten Q_1, Q_2, Q_3 gefällt werden können. Wir finden sofort:

$$
(11) \quad \begin{aligned}
s_1 &= c_{11}r_1 + c_{12}r_2 + c_{13}r_3 \\
s_2 &= c_{21}r_1 + c_{22}r_2 + c_{23}r_3 \\
s_3 &= c_{31}r_1 + c_{32}r_2 + c_{33}r_3.
\end{aligned}
$$

Auch die geometrische Bedeutung der neun Koefficienten $c_{\iota\varkappa}$ ergiebt sich sofort: sind $p_{\varkappa 1}$, $p_{\varkappa 2}$, $p_{\varkappa 3}$ die Senkrechten, die vom Punkte $Q_\varkappa$ auf die Geraden O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 gefällt werden können, so ist

$$
(12) \quad c_{\iota\varkappa} = \frac{p_{\iota\varkappa}}{h_\varkappa}.
$$

Der Übergang von einem Koordinatendreiecke zu einem andern wird auch in Bezug auf die Senkrechten, welche auf eine gerade Linie gefällt werden, durch homogene lineare Gleichungen vermittelt.

Übungen:

1) Man leite direkt den Satz her, dafs der senkrechte Abstand eines Punktes auf der Geraden O_2O_3 von der Geraden (r_1, r_2, r_3) gleich ist $c_2r_2 + c_3r_3$ und bestimme die Bedeutung der Koefficienten c_2 und c_3 vermittelst des in 3. benutzten Koefficienten α.

2) Man bestimme die Gröfse der Senkrechten r_1, r_2, r_3 für die in der Übung 1) zu § 3 (S. 18) angegebenen Geraden und vergleiche diese Längen mit den Koefficienten der dort gefundenen Gleichungen.

3) Man suche die Abstände folgender Punkte von der Geraden (r_1, r_2, r_3):

a) der Mitte der Seite O_2O_3,

b) des Schwerpunktes des Dreiecks $O_1O_2O_3$,

c) des Mittelpunktes des umgeschriebenen Kreises,

d) des Mittelpunktes des innern Berührungskreises,

e) des Höhenpunktes.

4) Welche Relation besteht zwischen den Senkrechten r_1, r_2, r_3, welche von den Eckpunkten des Koordinatendreiecks auf eine beliebige Gerade gefällt werden können?

Anleitung zur Lösung.

Die durch O_1 zu der gegebenen Geraden gezogene Parallele hat von O_2 den Abstand $r_2 - r_1$, und von O_3 den Abstand $r_3 - r_1$. Bildet der eine Strahl dieser Parallelen mit O_1O_2 den Winkel μ und mit O_1O_3 den Winkel ν, so ist bei passender Wahl der Drehung $\mu - \nu = \alpha_1$ (für $\alpha_1 = O_2O_1O_3$), also

$$\sin \alpha_1 = \sin \mu \cos \nu - \cos \mu \sin \nu.$$

Es ist

$$\sin \mu = \frac{r_2 - r_1}{O_1O_2}, \; \sin \nu = \frac{r_3 - r_1}{O_1O_3}, \; \cos \mu = \sqrt{1 - \sin^2 \mu}$$

u. s. w. Dadurch gelangt man zu der Beziehung:

$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 - 2\frac{r_2r_3}{h_2h_3}\cos\alpha_1 - 2\frac{r_3r_1}{h_3h_1}\cos\alpha_2$$
$$- 2\frac{r_1r_2}{h_1h_2}\cos\alpha_3 = 1.$$

Eine zweite Lösung ergiebt sich auf dem Wege, welcher im zweiten Teile (§ 4) für die Ebenen des Raumes durchgeführt werden soll.

§ 5.

Die allgemeinsten trimetrischen Koordinaten in der Ebene.

1. Die Vergleichung der Gleichungen (9) und (10) in § 3, 7 (S. 17) zeigt, dafs die Koefficienten a_1, a_2, a_3 in der Gleichung einer geraden Linie in enger Beziehung stehen zu den Senkrechten, welche man von den Eckpunkten des Koordinatendreiecks auf die Gerade fällen kann. Ebenso geht aus der Gleichung (10) § 4, 4 hervor, dafs die Koefficienten c_1, c_2, c_3 in der Gleichung eines Punktes eng mit den Senkrechten verbunden sind, die man vom Punkte aus auf die Seiten des Koordinatendreiecks fällt. Ist nämlich $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = 0$ die Gleichung einer Geraden, so sind die von den Ecken auf dieselbe gefällten Senkrechten proportional den Gröfsen a_1h_1, a_2h_2, a_3h_3; und wenn $c_1r_1 + c_2r_2 + c_3r_3 = 0$ die Gleichung eines Punktes ist, so sind die von ihm auf die Seiten des Dreiecks gefällten Senkrechten proportional den Produkten c_1h_1, c_2h_2, c_3h_3. Diese Beziehung ist uns aber noch nicht einfach genug. Wir wollen daher versuchen, solche Bestimmungsgröfsen (Koordinaten) x_1, x_2, x_3 für einen

Punkt und u_1, u_2, u_3 für eine Gerade einzuführen, dafs die Koefficienten a_1, a_2, a_3 in der Gleichung einer Geraden den Koordinaten u_1, u_2, u_3 der Geraden proportional sind, und dafs ebenso die Koefficienten c_1, c_2, c_3 in der Gleichung eines Punktes sich wie die Koordinaten des Punktes verhalten. Mit andern Worten: Wenn x_1, x_2, x_3 die Koordinaten eines Punktes und u_1, u_2, u_3 die einer Geraden sind, so soll die Bedingung dafür, dafs der Punkt in der Geraden liegt, durch die Gleichung dargestellt werden:

$$(1)\quad x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0.$$

2. Das erreichen wir auf folgende Weise: Wir wählen drei willkürliche, aber feste Konstante μ_1, μ_2, μ_3, von denen keine gleich null sein darf, und setzen:

$$(2)\quad x_1 = \mu_1 p_1,\ x_2 = \mu_2 p_2,\ x_3 = \mu_3 p_3,$$

wo p_1, p_2, p_3 die vom Punkte auf die Seiten des Koordinatendreiecks gefällten Senkrechten sind.

Ebenso setzen wir

$$(3)\quad u_1 = \nu_1 r_1,\ u_2 = \nu_2 r_2,\ u_3 = \nu_3 r_3,$$

wo r_1, r_2, r_3 die von den Eckpunkten O_1, O_2, O_3 auf die Gerade gefällten Senkrechten und ν_1, ν_2, ν_3 gewisse Konstante sind.

Der Punkt, welcher von den Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$ die senkrechten Abstände p_1, p_2, p_3 hat, fällt aber in die Gerade hinein, deren Abstände von den Eckpunkten O_1, O_2, O_3 bzw. r_1, r_2, r_3 sind, wofern die Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{p_1r_1}{h_1} + \frac{p_2r_2}{h_2} + \frac{p_3r_3}{h_3} = 0.$$

Diese Gleichung geht unter Einführung der Gröfsen x_1, x_2, x_3 und u_1, u_2, u_3 über in

$$\frac{x_1u_1}{\mu_1\nu_1h_1} + \frac{x_2u_2}{\mu_2\nu_2h_2} + \frac{x_3u_3}{\mu_3\nu_3h_3} = 0,$$

welche mit der Gleichung (1) identisch wird, sobald die Bedingungen erfüllt sind:

$$(4)\quad \mu_1\nu_1h_1 = \mu_2\nu_2h_2 = \mu_3\nu_3h_3.$$

Wir nennen die durch die Gleichungen (2) eingeführten Gröfsen x_1, x_2, x_3 die allgemeinsten trimetrischen Punktkoordinaten, und ebenso die durch die Gleichungen (3) eingeführten Gröfsen u_1, u_2, u_3 die allgemeinsten trimetrischen Linienkoordinaten. Sie heifsen auch Dreieckskoordinaten.

Zudem bezeichnen wir diese Punkt- und Linienkoordinaten als zusammengehörig, wofern die Bedingung dafür, dafs der Punkt (x) in eine Gerade (u) fällt, durch die Gleichung (1)

$$x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$$

dargestellt wird. Dazu wird erfordert:

a) dafs die Koordinatendreiecke identisch sind, und

b) dafs die in den Gleichungen (2) und (3) benutzten Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 und ν_1, ν_2, ν_3 in der Beziehung (4) zu einander stehen.

3. Lassen wir in der Gleichung (1) die Koordinaten u_1, u_2, u_3 konstante Werte b_1, b_2, b_3 annehmen, so giebt die Gleichung

$$(5)\quad b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

die Bedingung dafür an, dafs der Punkt (x) in der gegebenen geraden Linie liegt. Umgekehrt müssen die Koefficienten b_1, b_2, b_3 in der Gleichung einer geraden Linie ihren Koordinaten proportional sein. Hat nämlich eine gerade Linie von den Eckpunkten des Koordinatendreiecks die senkrechten Abstände r_1, r_2, r_3, und sind von einem beliebigen Punkte der Geraden die Senkrechten p_1, p_2, p_3 auf die Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$ gefällt, so besteht die Bedingung

$$\frac{r_1}{h_1}p_1 + \frac{r_2}{h_2}p_2 + \frac{r_3}{h_3}p_3 = 0.$$

Diese geht nach Einführung der Gröfsen x_1, x_2, x_3 über in

$$\frac{r_1}{\mu_1h_1}x_1 + \frac{r_2}{\mu_2h_2}x_2 + \frac{r_3}{\mu_3h_3}x_3 = 0,$$

oder wegen der Gleichungen (4) in

$$\nu_1r_1 \cdot x_1 + \nu_2r_2 \cdot x_2 + \nu_3r_3 \cdot x_3 = 0.$$

Damit diese Gleichung mit der Gleichung (5) identisch wird, müssen die Koefficienten b_1, b_2, b_3 den Gröfsen ν_1r_1, ν_2r_2, ν_3r_3, d. h. den Koordinaten der geraden Linie, proportional sein.

4. Ebenso können wir in der Gleichung (1) für x_1, x_2, x_3 konstante Werte a_1, a_2, a_3 annehmen; wir erhalten dann die Gleichung des Punktes (a_1, a_2, a_3) oder mit andern Worten die Bedingung dafür, dafs die Gerade (u_1, u_2, u_3) durch den Punkt (a_1, a_2, a_3) hindurchgeht, in der Form:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0.$$

Die Koefficienten in der Gleichung eines Punktes sind seinen Koordinaten proportional.

5. Zwischen den von einem Punkte auf die Seiten des Koordinatendreiecks gefällten Senkrechten besteht nach § 2, 6 die Beziehung:

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1.$$

Diese geht unter Einführung der Koordinaten x_1, x_2, x_3 über in

$$\frac{x_1}{\mu_1 h_1} + \frac{x_2}{\mu_2 h_2} + \frac{x_3}{\mu_3 h_3} = 1,$$

oder wenn wir $\mu_1 h_1 = c_1$, $\mu_2 h_2 = c_2$, $\mu_3 h_3 = c_3$ setzen, in

$$(6) \quad \frac{x_1}{c_1} + \frac{x_2}{c_2} + \frac{x_3}{c_3} = 1.$$

Hier sind $(c_1, 0, 0)$ die Koordinaten des Punktes O_1, $(0, c_2, 0)$ die des Punktes O_2 und $(0, 0, c_3)$ die des Punktes O_3.

6. Beim Übergange zu einem andern Koordinatensystem kann man nicht nur das Dreieck $O_1O_2O_3$, sondern auch die Koordinaten μ_1, μ_2, μ_3 und ν_1, ν_2, ν_3 verändern. Ist $Q_1Q_2Q_3$ das neue Koordinatendreieck, sind q_1, q_2, q_3 die Senkrechten, welche vom Punkte (x_1, x_2, x_3) auf die Geraden Q_2Q_3, Q_3Q_1 und Q_1Q_2 gefällt werden können, und setzt man:

$$y_1 = \mu_1' q_1, \; y_2 = \mu_2' q_2, \; y_3 = \mu_3' q_3,$$

wo μ_1', μ_2', μ_3' beliebige Koefficienten sind: so darf man die Gröfsen y_1, y_2, y_3 als neue Punktkoordinaten betrachten. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten (x) und (y) lassen sich unter Vermittlung der Gleichungen (11) und (12) § 3, 8 leicht herleiten. Wir finden:

$$(7) \quad \begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_2 \\ y_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ y_3 &= b_{31}x_3 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3. \end{aligned}$$

Statt die geometrische Bedeutung der neun Koefficienten $b_{\iota\varkappa}$ auf diese Weise zu bestimmen, kann man folgende Erwägung anstellen. Wenn $y_1 = 0$ sein soll, so mufs der betrachtete Punkt auf der Geraden Q_2Q_3 liegen; daher stellt die Gleichung

$$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = 0$$

die Gerade Q_2Q_3 in Koordinaten des ersten Systems dar. Die Koefficienten b_{11}, b_{12}, b_{13} sind also bis auf einen willkürlichen Faktor gegeben, sobald die Gerade Q_2Q_3 bekannt ist.

Ebenso stellt die Gleichung

$$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = 0$$

die Gerade Q_1Q_3 und die Gleichung

$$b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = 0$$

die Gerade Q_1Q_2 dar. Sobald also das neue Koordinatendreieck bekannt ist, lassen sich die neun Koefficienten $b_{\iota\varkappa}$ bis auf drei willkürliche Faktoren bestimmen.

7. In ähnlicher Weise formt man die Linienkoordinaten um. Sind u_1, u_2, u_3 die Koordinaten, welche man bei Benutzung des Dreiecks $O_1O_2O_3$ und für die Konstanten ν_1, ν_2, ν_3 erhält, und entsprechen die Linienkoordinaten v_1, v_2, v_3 dem Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ und den Koefficienten ν_1', ν_2', ν_3', so kann man die Gleichungen (11) und (12) § 4, 6 benutzen, um die Beziehungen zwischen den Gröfsen v_1, v_2, v_3 und u_1, u_2, u_3 herzuleiten. Dabei macht es sich aber unangenehm bemerklich, dafs die neuen Punkt- und Linienkoordinaten nur dann zusammengehören, wenn zwischen denn Koefficienten μ_1', μ_2', μ_3' und ν_1', ν_2', ν_3' die Gleichungen bestehen:

$$\mu_1'\nu_1'h_1' = \mu_2'\nu_2'h_2' = \mu_3'\nu_3'h_3'.$$

Wir schlagen deshalb einen andern Weg ein. Mit den Gleichungen (7) verbinden wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + c_{13}u_3 \\ (8) \qquad v_2 &= c_{21}u_1 + c_{22}u_2 + c_{23}u_3 \\ v_3 &= c_{31}u_1 + c_{32}u_2 + c_{33}u_3. \end{aligned}$$

Nun drückt die Gleichung $y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3 = 0$ die Bedingung dafür aus, dafs der Punkt (y_1, y_2, y_3) in der Geraden (v_1, v_2, v_3) liegt. Daher mufs diese Gleichung jedesmal erfüllt sein, wenn die Gleichung $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$ befriedigt wird. Es ist aber

$$\Sigma y_\alpha v_\alpha = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} b_{\alpha\beta}\, c_{\alpha\gamma}\, x_\beta\, u_\gamma.$$

Die rechte Seite mufs also immer verschwinden, wenn die Gleichung besteht: $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$, oder die rechte Seite mufs sein gleich $\omega\,(x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3)$. Daher mufs für ungleiche Marken β und γ jedesmal die Gleichung erfüllt sein:

$$b_{1\beta}\, c_{1\gamma} + b_{2\beta}\, c_{2\gamma} + b_{3\beta}\, c_{3\gamma} = 0.$$

Dazu treten die drei Gleichungen:

$$b_{1\beta}\, c_{1\beta} + b_{2\beta}\, c_{2\beta} + b_{3\beta}\, c_{3\beta} = \omega.$$

Hieraus folgt, dafs der Koefficient $c_{\alpha\beta}$ bis auf einen für alle Marken α, β gleichen Faktor identisch ist mit dem Koefficienten von $b_{\alpha\beta}$ in der Determinante:

$$(9)\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Wenn nämlich die Determinante (9) mit B und in ihr der Koefficient von $b_{\alpha\beta}$ mit $B_{\alpha\beta}$ bezeichnet wird, so gilt für ungleiche Marken β und γ die Gleichung:

$$b_{1\beta}\, B_{1\gamma} + b_{2\beta}\, B_{2\gamma} + b_{3\beta}\, B_{3\gamma} = 0,$$

während für jede Marke β die Gleichung besteht:

$$b_{1\beta}\, B_{1\beta} + b_{2\beta}\, B_{2\beta} + b_{3\beta}\, B_{3\beta} = B.$$

Man kann also die Koefficienten $c_{\alpha\beta}$ bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmen, sobald die Koefficienten $b_{\alpha\beta}$ bekannt sind.

Die so gefundene Beziehung kann man noch in anderer Weise aussprechen. Werden die Koordinaten x in die y umgewandelt vermittelst der Gleichungen (11), die man kurz auch in der Form schreiben kann:

$$y_\alpha = \sum_\varkappa b_{\alpha\varkappa}\, x_\varkappa,$$

sind u_1, u_2, u_3 Linienkoordinaten, die zu den Punktkoordinaten x_1, x_2, x_3 gehören, und gehören ebenso die Punktkoordinaten y_1, y_2, y_3 und die Linienkoordinaten v_1, v_2, v_3 zusammen, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(10)\quad u_\alpha = \varrho \sum b_{\varkappa\alpha}\, v_\varkappa.$$

In der That ist jetzt

$$\sum y_\alpha v_\alpha = \sum_{\alpha,\varkappa} v_\alpha\, b_{\alpha\varkappa}\, x_\varkappa = \sum_\varkappa x_\varkappa \,.\, \sum_\alpha v_\alpha\, b_{\alpha\varkappa} = \frac{1}{\varrho} \sum x_\varkappa u_\varkappa.$$

8. Nach § 3, 2 bestehen zwischen den Senkrechten p_1, p_2, p_3; p_1', p_2', p_3'; p_1'', p_2'', p_3'', welche je von drei Punkten 0, 1, 2 einer geraden Linie auf die Seiten des Koordinatendreiecks gefällt werden können, die Beziehungen:

$$\begin{aligned} p_1 &= (1+\lambda)\, p_1' - \lambda p_1'' \\ p_2 &= (1+\lambda)\, p_2' - \lambda p_2'' \\ p_3 &= (1+\lambda)\, p_3' - \lambda p_3''. \end{aligned}$$

Indem wir diese Gleichungen der Reihe nach mit den oben eingeführten Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 multiplizieren und die

Koordinaten des Punktes 0 mit x_1, x_2, x_3, die des Punktes 1 mit x_1', x_2', x_3' und die des Punktes 2 mit x_1'', x_2'', x_3'' bezeichnen, erhalten wir die Bedingung dafür, dafs der Punkt (x) in der Verbindungslinie der Punkte (x') und (x'') liegt, in der Form:

$$(11)\quad \begin{aligned} x_1 &= (1+\lambda)x_1' - \lambda x_1'' \\ x_2 &= (1+\lambda)x_2' - \lambda x_2'' \\ x_3 &= (1+\lambda)x_3' - \lambda x_3''. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können wir in eine einzige zusammenfassen, indem wir die Gleichungen der Punkte einführen. Ist die Gleichung des Punktes 1

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0,$$

die des Punktes 2:

$$b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 = 0,$$

und die des Punktes 0

$$c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 = 0,$$

so mufs sein:

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha a_1,\ x_2' = \alpha a_2,\ x_3' = \alpha a_3, \\ x_1'' &= \beta b_1,\ x_2'' = \beta b_2,\ x_3'' = \beta b_3, \\ x_1 &= \gamma c_1,\ x_2 = \gamma c_2,\ x_3 = \gamma c_3. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (11) der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3, so folgt:

$$\gamma(c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3) = (1+\lambda)\,\alpha\,(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) - \lambda\beta\,(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3).$$

Damit die Gerade (u) durch den Punkt 0 hindurchgeht, mufs die linke, und somit auch die rechte Seite dieser Gleichung verschwinden. Die Gleichung des Punktes 0 können wir demnach auch in der Form schreiben:

$$(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) - \frac{\lambda\beta}{(1+\lambda)\alpha}(b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3) = 0.$$

Hier setzen wir kurz:

$$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = A,\quad b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 = B,$$

$$\frac{\lambda\beta}{(1+\lambda)\alpha} = -\,\omega;$$

dann nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$A + \omega B = 0;$$

wir erhalten also den Satz:

Sind $A=0$ und $B=0$ die Gleichungen zweier Punkte, so kann man die Gleichung eines jeden dritten Punktes, der mit ihnen in gerader Linie liegt, in der Form schreiben:

$$(12)\quad A+\omega B=0.$$

9. In den Gleichungen (11) stellt der Quotient $-\lambda:(1+\lambda)$ das Verhältnis dar, nach welchem die Strecke 12 im Punkte 0 geteilt wird. Sind $A=0$, $B=0$, $A+\omega B=0$ die Gleichungen dreier in gerader Linie liegender Punkte, so stellt unter Beibehaltung der vorhin eingeführten Koefficienten der Bruch $\alpha\omega:\beta$ das Verhältnis dar, in welchem die Abschnitte stehen, welche durch den dritten Punkt auf der durch die beiden ersten begrenzten Strecke bestimmt werden. Indem wir einen vierten Punkt $A+\omega' B=0$ auf derselben Geraden hinzufügen, mufs der Quotient

$$\frac{\alpha\omega'}{\beta}:\frac{\alpha\omega}{\beta}=\frac{\omega'}{\omega}$$

das Doppelverhältnis der vier Punkte darstellen.

Hiernach liegen die vier Punkte:

$$A=0,\ B=0,\ A+\omega B=0,\ A+\omega' B=0$$

harmonisch, wenn $\omega':\omega=-1$ oder $\omega'+\omega=0$ ist. Somit stellen die Gleichungen:

$$A=0,\ B=0,\ A+\omega B=0,\ A-\omega B=0$$

vier harmonische Punkte dar.

10. Aus den Gleichungen (7) § 4, 3 gehen durch Multiplikation mit den oben eingeführten Koefficienten ν_1, ν_2, ν_3 die Gleichungen hervor:

$$(13)\quad \begin{aligned} u_1 &= \varrho u_1' + \sigma u_1'' \\ u_2 &= \varrho u_2' + \sigma u_2'' \\ u_3 &= \varrho u_3' + \sigma u_3'', \end{aligned}$$

wo (u'), (u''), (u) die Koordinaten dreier gerader Linien 1, 2, 0 sind, die durch einen Punkt gehen, also einem Büschel angehören. Ist $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0$ die Gleichung der Linie 1,

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0$$

die der Linie 2, so mufs sein

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha u_1', & a_2 &= \alpha u_2', & a_3 &= \alpha u_3' \\ b_1 &= \beta u_1'', & b_2 &= \beta u_2'', & b_3 &= \beta u_3''. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (10) geht also durch Multiplikation mit x_1, x_2, x_3 die folgende hervor:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = \frac{\varrho}{\alpha}(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)$$
$$+ \frac{\sigma}{\beta}(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3).$$

Soll demnach der Punkt (x) auf der Geraden (u) liegen, so mufs die Gleichung bestehen:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \frac{\alpha\sigma}{\beta\varrho}(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) = 0.$$

Wir schreiben die Gleichung der Linie 1 kurz $A = 0$, die der Linie 2 kurz $B = 0$ und setzen $\frac{\alpha\sigma}{\beta\varrho} = \omega$; dann können wir die Gleichung der Geraden 0 in der Form $A + \omega B = 0$ schreiben.

Sind $A = 0$ und $B = 0$ die Gleichungen zweier gerader Linien, so läfst sich jede durch ihren Schnittpunkt gehende Gerade durch die Gleichung $A + \omega B = 0$ darstellen.

Das Schnittverhältnis, nach welchem der von den Geraden $A = 0$ und $B = 0$ gebildete Winkel durch die Gerade $A + \omega B = 0$ geteilt wird, ist gleich $\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{\beta\omega}{\alpha}$. Nehmen wir eine vierte Gerade $A + \omega' B = 0$ hinzu, so ist das Doppelverhältnis der vier Geraden gleich $\frac{\beta\omega}{\alpha} : \frac{\beta\omega'}{\alpha}$ oder gleich $\omega : \omega'$.

Demnach stellen die Gleichungen:

$$A = 0, \ B = 0, \ A + \omega B = 0, \ A - \omega B = 0$$

vier harmonische Strahlen eines Büschels dar.

11. Es seien im Anschlufs an 10. vier Gerade eines Strahlenbüschels durch die Gleichungen gegeben:

$$(14) \quad A + \varkappa B = 0, \ A + \lambda B = 0, \ A + \mu B = 0, \ A + \nu B = 0.$$

Um das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen zu berechnen, setzen wir

$$A + \varkappa B = A_1, \ A + \lambda B = B_1.$$

Dann wird

$$A + \mu B = \frac{\lambda - \mu}{\lambda - \varkappa}\left(A_1 + \frac{\mu - \varkappa}{\lambda - \mu} B_1\right), \ A + \nu B = \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \varkappa}\left(A_1 + \frac{\nu - \varkappa}{\lambda - \nu} B_1\right).$$

Die Gleichungen (15) können wir jetzt in der Form schreiben:

$$A_1 = 0,\ B_1 = 0,\ A_1 + \frac{\mu - \kappa}{\lambda - \mu} B_1 = 0,\ A_1 + \frac{\nu - \kappa}{\lambda - \nu} B_1 = 0.$$

Daher ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen (15) gleich

$$(15)\quad \frac{\mu - \kappa}{\lambda - \mu} : \frac{\nu - \kappa}{\lambda - \nu}.$$

Sind $A + \omega_1 B = 0$, $A + \omega_2 B = 0$, $A + \omega_3 B = 0$, $A + \omega_4 B = 0$ die Gleichungen von vier Strahlen eines Büschels, so ist ihr Doppelverhältnis gleich

$$\frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_3} : \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_4}.$$

12.[1] Es seien A, B, A', B' vier homogen lineare Formen in x_1, x_2, x_3. Indem man ω alle möglichen Werte annehmen läfst, stellt die Gleichung $A + \omega B = 0$ alle Geraden eines Strahlenbüschels dar, der durch die Geraden $A = 0$ und $B = 0$ bestimmt ist. Für die Geraden eines zweiten Strahlenbüschels gilt bei derselben Festsetzung die Gleichung $A' + \omega B' = 0$. Jetzt ordne man jeder Geraden des ersten Büschels diejenige Gerade des zweiten zu, in deren Gleichung der Koefficient ω denselben Wert hat. Nun stellt ω das Doppelverhältnis der vier Strahlen dar: $A = 0$, $B = 0$, $A + \omega B = 0$, $A + B = 0$. Diesen vier Strahlen entsprechen aber im zweiten Strahlenbüschel die Geraden $A' = 0$, $B' = 0$, $A' + \omega B' = 0$, $A' + B' = 0$; die so bestimmten Quadrupel haben dasselbe Doppelverhältnis.

Wie wir eben bewiesen haben, ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen:

$$A + \omega_1 B = 0,\ A + \omega_2 B = 0,\ A + \omega_3 B = 0,\ A + \omega_4 B = 0$$

gleich

$$\frac{\omega_3 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_3} : \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_4}.$$

Da dies auch das Doppelverhältnis der vier Geraden:

$$A' + \omega_1 B' = 0,\ A' + \omega_2 B' = 0,\ A' + \omega_3 B' = 0,$$
$$A' + \omega_4 B' = 0$$

ist, so erhalten wir den Satz:

Ordnet man in zwei Strahlenbüscheln $A + \omega B = 0$ und $A' + \omega B' = 0$ diejenigen Geraden einander zu, zu denen gleiche

[1] Der Schlufs des § kann anfangs überschlagen werden.

Werte von ω gehören, so haben je vier Gerade des einen Büschels dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Geraden des andern.

In gleicher Weise kann man im Anschluſs an 9., wenn $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ homogen lineare Formen in u_1, u_2, u_3 sind, alle Punkte einer Punktreihe durch die Gleichung $\boldsymbol{A}+\omega\boldsymbol{B}=0$ darstellen. Ordnet man jetzt wieder dem Punkte $\boldsymbol{A}+\omega\boldsymbol{B}=0$ den Punkt $\boldsymbol{A}'+\omega\boldsymbol{B}'=0$ zu, so haben je vier Punkte der ersten Punktreihe dasselbe Doppelverhältnis, wie die entsprechenden Punkte der zweiten. Wesentlich dasselbe gilt auch, wenn man dem Punkte $\boldsymbol{A}+\omega\boldsymbol{B}=0$ einer Punktreihe den Strahl $\mathrm{A}+\omega\mathrm{B}=0$ eines Büschels zuordnet.

Wir sagen, zwei einstufige Gebilde (§ 1, 10) seien einander p r o j e k t i v zugeordnet, wenn jedem Elemente des einen ein Element des andern derartig entspricht, daſs das Doppelverhältnis von irgend vier Elementen gleich ist dem Doppelverhältnisse der entsprechenden Elemente des andern. Hiernach dürfen wir den soeben bewiesenen Satz in folgender Form aussprechen:

Ordnet man zwei ebene Strahlenbüschel $\mathrm{A}+\omega\mathrm{B}=0$, $\mathrm{A}'+\omega\mathrm{B}'=0$ oder zwei gerade Punktreihen $\boldsymbol{A}+\omega\boldsymbol{B}=0$, $\boldsymbol{A}'+\omega\boldsymbol{B}'=0$ oder eine Punktreihe $\boldsymbol{A}+\omega\boldsymbol{B}=0$ und einen Strahlenbüschel $\mathrm{A}+\omega\mathrm{B}=0$ einander derartig zu, daſs solche Elemente einander entsprechen, für welche der Koefficient ω denselben Wert hat, so sind die Gebilde einander projektiv zugeordnet.

13. Wenn wir zwei einstufige Gebilde projektiv auf einander beziehen wollen, so dürfen wir drei Elementen des einen drei des andern willkürlich zuordnen.

Es genügt, diesen Satz für Punktreihen zu beweisen, da der Beweis für andere Gebilde im wesentlichen ungeändert bleibt. Man sieht sofort, daſs die projektive Zuordnung vollständig bestimmt ist, nachdem man drei Punkten α, β, γ einer Punktreihe drei Punkte α', β', γ' einer andern zugeordnet hat; man hat nämlich jedem vierten Punkte ξ denjenigen Punkt ξ' zuzuordnen, für welchen das Doppelverhältnis $(\alpha'\beta'\gamma'\xi')=(\alpha\beta\gamma\xi)$ ist. Hiernach können wir höchstens drei Punktepaare in den Punktreihen als entsprechend einander zuordnen. Daſs man diese Zahl aber wirklich wählen darf, erkennt man auf folgende Weise:

Drei beliebige Punkte der ersten Punktreihe können wir durch die Gleichungen darstellen: $A = 0$, $B = 0$, $A + B = 0$.

Demjenigen Punkte der zweiten Punktreihe, welcher dem Punkte $A = 0$ entspricht, kann man die Gleichung $A' = 0$ geben; ebenso kann man die Gleichung des dem Punkte $B = 0$ entsprechenden Punktes kurz $B' = 0$ schreiben. Dann entspricht dem Punkte $A + B = 0$ ein Punkt $\varkappa A' + \lambda B' = 0$. Hier ersetze man $\varkappa A'$ durch A' und $\lambda B'$ durch B'; dann entspricht dem Punkte $A + B = 0$ der Punkt $A' + B' = 0$. Indem man jetzt dem Punkte $A + \omega B = 0$ den Punkt $A' + \omega B' = 0$ entsprechen läfst, ist eine projektive Zuordnung der beiden Punktreihen herbeigeführt.

Übungen.

1) Statt die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 einzuführen, kann man die Winkel festsetzen, unter denen von dem zu bestimmenden Punkte aus gerade Strecken bis zu den Seiten des Koordinatendreiecks gezogen werden sollen. So möge x_1 gegen O_2O_3 unter einem Winkel von $60° \left(\frac{\pi}{3}\right)$, x_2 gegen O_3O_1 unter einem Winkel von $45° \left(\frac{\pi}{4}\right)$ und x_3 gegen O_1O_2 unter einem Winkel von $30° \left(\frac{\pi}{6}\right)$ geneigt sein. Man bestimme für diese Festsetzung die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3; ferner suche man die Koordinaten x_1, x_2, x_3 für die Eckpunkte und für die merkwürdigen Punkte des Dreiecks $O_1O_2O_3$.

2) Man kann auch verlangen, dafs die Gröfsen x_1, x_2, x_3 der Reihe nach drei Strecken gleich sein sollen, welche zu vorgeschriebenen Richtungen parallel verlaufen. So ziehe man von dem zu bestimmenden Punkte aus gerade Strecken parallel zu den Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks $O_1O_2O_3$ jedesmal bis zum Schnitt mit der gegenüberliegenden Seite und wähle diese drei Strecken zu Koordinaten des Punktes. Bei dieser Festsetzung sollen wieder die in 1) gestellten Fragen beantwortet werden.

3) Die soeben gewählten Richtungen ersetze man durch die der drei Mittellinien und erledige dieselben Fragen wie vorher.

4) Als Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes P wähle man die Flächenräume der Dreiecke O_2O_3P, O_3O_1P, O_1O_2P, wobei der

Flächeninhalt das positive oder negative Vorzeichen erhalten soll, jenachdem der Punkt P dem positiven oder negativen Teile gegen die entsprechende Dreiecksseite angehört.

a) Man gebe die der Gleichung (6) entsprechende Beziehung an, welche zwischen diesen drei Gröfsen x_1, x_2, x_3 besteht.

b) Welche Werte hat man den Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 beizulegen, um aus unsern allgemeinen Festsetzungen zu diesen Koordinaten zu gelangen?

c) Man bestimme die Koordinaten für die Eckpunkte und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks $O_1O_2O_3$.

d) Wenn man die Koordinaten x_1, x_2, x_3 in der angegebenen Weise wählt, so darf man als zugehörige Koordinaten einer Geraden die von den Eckpunkten auf die Gerade gefällten Senkrechten betrachten.[1]

§ 6.

Die Verhältnisse der Koordinaten als Doppelverhältnisse.

1. Indem wir zur Bestimmung der Gröfsen x_1, x_2, x_3 die willkürlichen Konstanten μ_1, μ_2, μ_3 benutzt haben, ist die geometrische Bedeutung der Koordinaten eines Punktes zurückgedrängt worden. Wir wollen versuchen, diesen Nachteil wenigstens zum Teil zu beseitigen. Zu dem Ende betrachten wir denjenigen Punkt E, für welchen die drei Gröfsen x_1, x_2, x_3 denselben Wert haben; wir nennen ihn den Einheitspunkt des Koordinatensystems.

Dieser Punkt läfst sich, nachdem die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 gegeben sind, in folgender Weise finden. Sind e_1, e_2, e_3 die von ihm auf die Seiten des Koordinatendreiecks gefällten Senk-

---

[1] Diese Koordinaten, welche Möbius 1827 in seinem »barycentrischen Calcul« benutzt, haben, wie aus den Sätzen über die Zusammensetzung paralleler Kräfte hervorgeht, folgende Eigenschaft: Errichtet man in den Punkten O_1, O_2, O_3 Senkrechte auf der Ebene, welche der Reihe nach gleich x_1, x_2, x_3 sind und dem Vorzeichen entsprechend nach oben oder nach unten gerichtet sind, so stehen sie im Gleichgewicht, falls man noch im Punkte P eine Kraft gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks senkrecht zur Ebene nach unten hin anbringt.

rechten, so sind seine Koordinaten $\mu_1 e_1$, $\mu_2 e_2$, $\mu_3 e_3$. Da aber $\mu_1 e_1 = \mu_2 e_2 = \mu_3 e_3$ sein soll, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \frac{e_1}{e_3} = \frac{\mu_3}{\mu_1}.$$

Die sämtlichen Punkte, für welche die Abstände von den Geraden O_2O_3 und O_1O_3 in dem gegebenen Verhältnisse $\mu_2 : \mu_1$ stehen, liegen auf einer geraden Linie; ebenso enthält eine zweite gerade Linie alle Punkte, deren Abstände von den Geraden A_3A_2 und A_1A_2 das Verhältnis $\mu_3 : \mu_1$ haben. Falls diese beiden Geraden nicht parallel sind, haben sie einen Schnittpunkt, für den $\mu_1 e_1 = \mu_2 e_2 = \mu_3 e_3$ ist.

Man kann auch, nachdem die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 gegeben sind, die Senkrechten e_1, e_2, e_3 berechnen. Zu den Gleichungen $\mu_1 e_1 = \mu_2 e_2 = \mu_3 e_3$ tritt die Gleichung (1) § 2, 5:

$$\frac{e_1}{h_1} + \frac{e_2}{h_2} + \frac{e_3}{h_3} = 1.$$

Durch Verbindung dieser Gleichungen erhält man:

$$\frac{e_1}{\mu_1}\left(\frac{\mu_1}{h_1} + \frac{\mu_2}{h_2} + \frac{\mu_3}{h_3}\right) = 1, \quad \frac{e_2}{\mu_2}\left(\frac{\mu_1}{h_1} + \frac{\mu_2}{h_2} + \frac{\mu_3}{h_3}\right) = 1,$$

$$\frac{e_3}{\mu_3}\left(\frac{\mu_1}{h_1} + \frac{\mu_2}{h_2} + \frac{\mu_3}{h_3}\right) = 1.$$

Falls also der gemeinschaftliche Faktor $\frac{\mu_1}{e_1} + \frac{\mu_2}{e_2} + \frac{\mu_3}{e_3}$ von null verschieden ist, kann man die Werte von e_1, e_2, e_3 angeben und dadurch die Lage des Punktes E bestimmen.

Der ausgeschlossene Fall wird sich später gleichfalls erledigen.

2. Wenn umgekehrt der Punkt E gegeben ist und e_1, e_2, e_3 die von ihm auf die Seiten des Koordinatendreiecks gefällten Senkrechten sind, hat man die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 so zu wählen, dafs

$$\mu_1 e_1 = \mu_2 e_2 = \mu_3 e_3$$

ist. Zu dem Ende können wir noch den gemeinschaftlichen Wert dieser drei Produkte willkürlich wählen. Wir können aber auch einen der Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 willkürlich annehmen und dann die beiden andern berechnen. Es sind also jetzt die Verhältnisse der Konstanten und damit die Verhältnisse der Koordinaten

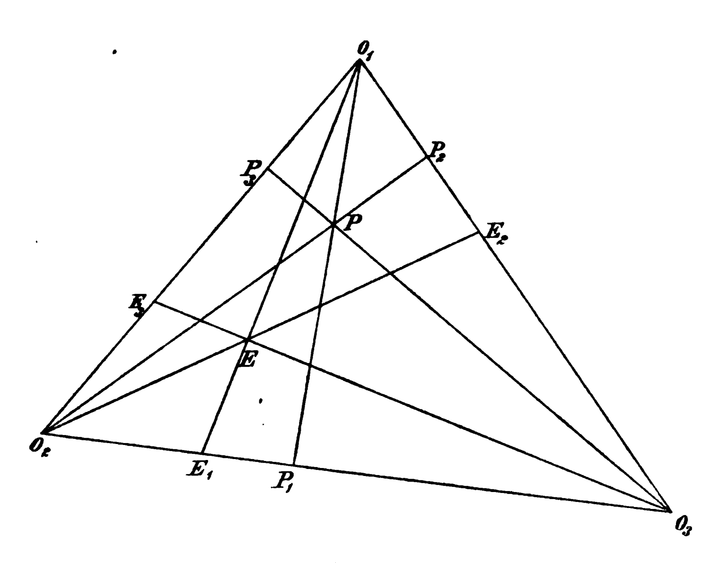
x_1, x_2, x_2 für jeden Punkt bestimmt. Hiernach ergiebt sich der Satz:

Kennt man die Eckpunkte des Koordinatendreiecks und den Einheitspunkt, so können die Verhältnisse der Koordinaten für jeden Punkt ermittelt werden.

3. Da uns die Verhältnisse der Koordinaten für jeden Punkt bekannt sind, sobald wir die Eckpunkte des Koordinatendreiecks und den Einheitspunkt angenommen haben, fragen wir, welche Bedeutung die Quotienten aus zwei Koordinaten des Punktes P besitzen.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnung ist

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{\mu_2 p_2}{\mu_3 p_3} = \frac{p_2}{p_3} : \frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{p_2}{p_3} : \frac{e_2}{e_3}.$$



Nun ist (nach § 1, 5) der Bruch $p_2 : p_3$ bis auf das Vorzeichen das Schnittverhältnis, nach welchem der Winkel $O_3O_1O_2$ durch den Strahl O_1P, und der Bruch $e_2 : e_3$ das Schnittverhältnis, nach welchem derselbe Winkel durch den Strahl O_1E geteilt wird. Indem man noch die Vorzeichen berücksichtigt, erkennt man, dafs der Quotient

$$\frac{p_2}{p_3} : \frac{e_2}{e_3}$$

das Doppelverhältnis der vier Strahlen O_1O_3, O_1O_2, O_1P und O_1E darstellt; es ist:

$$(1)\quad \frac{x_2}{x_3} = (O_1 : O_3O_2PE).$$

Nennt man E_1 den Schnittpunkt von O_1E mit O_2O_3 und P_1 den Schnittpunkt von O_1P mit O_2O_3, so ist auch:

$$\frac{x_2}{x_3} = (O_3O_2P_1E_1).$$

Indem man die Geraden O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2 der Reihe nach kurz durch I, II, III bezeichnet, läfst sich die vorstehende Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\frac{x_2}{x_3} = (\mathrm{II}, \mathrm{III}, O_1P, O_1E).$$

Auf dieselbe Weise ergiebt sich:

$$\frac{x_3}{x_1} = (O_2 : O_1O_3PE) = (O_1O_3P_2E_2) = (\mathrm{III}, \mathrm{I}, O_2P, O_2E),$$

$$\frac{x_1}{x_2} = (O_3 : O_2O_1PE) = (O_2O_1P_3E_3) = (\mathrm{I}, \mathrm{II}, O_3P, O_3E).$$

Das Verhältnis zweier Koordinaten ist demnach gleich dem Doppelverhältnisse, welches die entsprechenden Seiten des Koordinatendreiecks mit den beiden Geraden bilden, welche von ihrem Schnittpunkte nach dem zu bestimmenden Punkte und dem Einheitspunkte gezogen werden.

4. Einheitsgerade nennen wir diejenige Gerade, für welche die Koordinaten u_1, u_2, u_3 denselben Wert haben.

Ihre Gleichung in Punktkoordinaten ist:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

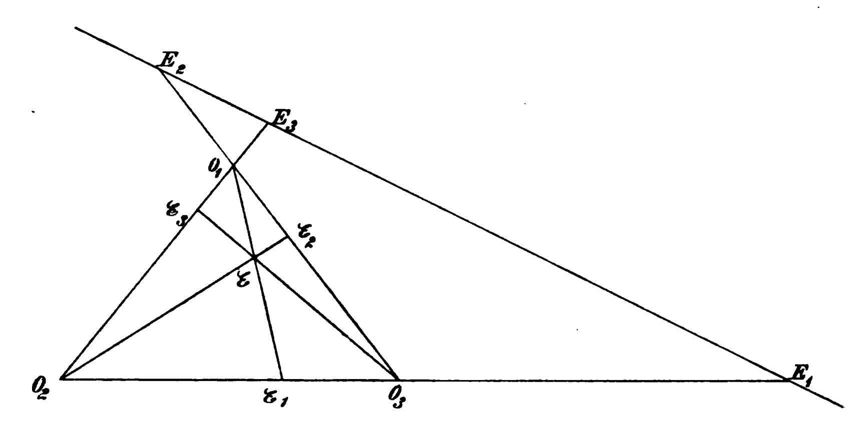
Für den Schnittpunkt dieser Linie mit der Geraden O_2O_3 ist $x_1 = 0$, also auch $x_2 + x_3 = 0$. Die Gerade, welche den Punkt X_1 mit dem Einheitspunkte verbindet, hat die Gleichung $x_2 = x_3$ oder $x_2 - x_3 = 0$.

Demnach gehen vom Punkte O_1 die vier Geraden aus:

$$x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0,\ x_2 + x_3 = 0.$$

Diese vier Linien liegen nach § 5, 9 harmonisch; sie schneiden also auch die Gerade O_2O_3 in vier harmonischen Punkten. Da man eine gleiche Überlegung für die andern Seiten des Koordinatendreiecks anstellen kann, so gilt der Satz:

Die Einheitsgerade schneidet jede Seite des Koordinatendreiecks in demjenigen Punkte, welcher in Bezug auf die Eckpunkte dem Schnittpunkte der Verbindungslinie des Einheitspunktes mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte harmonisch zugeordnet ist.



Um die Einheitsgerade zu finden, ziehen wir die Geraden $O_1\mathfrak{E}$ und $O_2\mathfrak{E}$ bis zu den Schnittpunkten $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ je mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite. Jetzt suche man zu den Punkten O_2, O_3, $\mathfrak{E}_1$ den vierten harmonischen Punkt E_1 und zu O_3, [illegible], $\mathfrak{E}_2$ den vierten harmonischen Punkt E_2. Die Gerade E_1E_2 hat die Gleichung: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; sie ist also die Einheitsgerade. Diese schneidet die Seite O_1O_2 in einem Punkte E_3, welcher zu den Punkten O_1, O_2, $\mathfrak{E}_3$ harmonisch liegt. Wir wären also zu derselben Geraden gelangt, wenn wir den Punkt E_3 mit einem der Punkte E_1 und E_2 verbunden hätten.

5. Da wir dem Einheitspunkt jede Lage mit Ausschlufs der drei geraden Linien O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 geben können, so folgt aus der vorangehenden Untersuchung der Satz:

Verbindet man einen beliebigen Punkt der Ebene mit den Eckpunkten eines Dreiecks, verlängert jede dieser Geraden bis zum Schnittpunkte mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite und sucht zu jedem dieser Schnittpunkte den vierten harmonischen Punkt in Bezug auf die Endpunkte der entsprechenden Seite, so liegen

diese drei Punkte in gerader Linie. Diese Gerade heifst die Harmonikale des Punktes in Bezug auf das Dreieck.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir das gegebene Dreieck zum Koordinatendreieck und den Punkt zum Einheitspunkte; wir zeigen dann auf dem soeben durchgeführten Wege, dafs die neu konstruierte Gerade die Einheitsgerade ist.

Den in der vorigen Nummer bewiesenen Satz können wir jetzt in folgender Weise aussprechen:

Die Einheitsgerade ist die Harmonikale des Einheitspunktes in Bezug auf das Koordinatendreieck.

Damit ein Punkt- und ein Linien-Koordinatensystem in dem Sinne, den wir oben (§ 5, 2 S. 27) angegeben haben, zusammengehören, müssen sie

a) auf dasselbe Koordinatendreieck bezogen sein,

b) mufs die Einheitsgerade des Liniensystems die Harmonikale zum Einheitspunkte des Punktsystems in Bezug auf das Koordinatendreieck sein.

6. Die von den Eckpunkten O_1, O_2, O_3 auf die Einheitsgerade gefällten Senkrechten seien ε_1, ε_2, ε_3, somit $\nu_1\varepsilon_1$, $\nu_2\varepsilon_2$, $\nu_3\varepsilon_3$ die Koordinaten der Einheitsgeraden. Es mufs also

$$\nu_1\varepsilon_1 = \nu_2\varepsilon_2 = \nu_3\varepsilon_3$$

sein. Sind jetzt u_1, u_2, u_3 die Koordinaten einer beliebigen Geraden, so ist unter Beibehaltung der früher angewandten Bezeichnung:

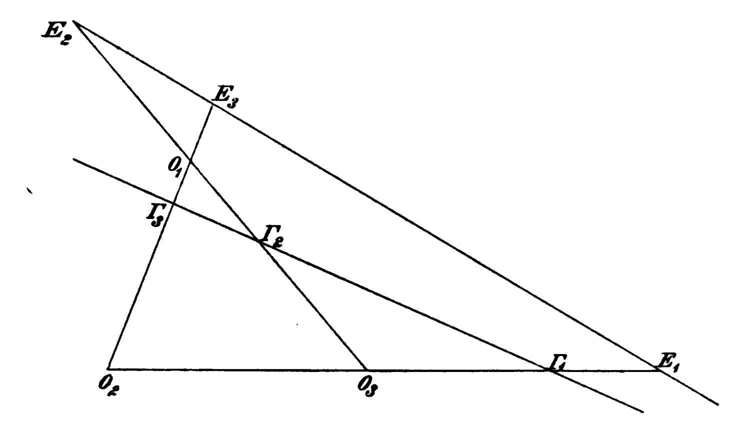
$$\frac{u_2}{u_3} = \frac{\nu_2 r_2}{\nu_3 r_3} = \frac{r_2}{r_3} : \frac{\nu_3}{\nu_2} = \frac{r_2}{r_3} : \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}.$$

Wir nennen Γ_1 den Schnittpunkt der Geraden (u_1, u_2, u_3) mit O_2O_3, Γ_2 ihren Schnittpunkt mit O_3O_1 und Γ_3 den mit O_1O_2. Dann stellt (nach § 1, 2 S. 1) der Bruch $\varepsilon_2 : \varepsilon_3$ das Verhältnis dar, nach welchem die Strecke O_2O_3 im Punkte E_1 geteilt wird, und der Bruch $r_2 : r_3$ das Schnittverhältnis für die Teilung derselben Strecke im Punkte Γ_1; demnach ist der Quotient

$$\frac{r_2}{r_3} : \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$$

das Doppelverhältnis der vier Punkte O_2, O_3, Γ_1, E_1; es ist also

$$u_2 : u_3 = (O_2 O_3 \Gamma_1 E_1).$$



Ebenso ergiebt sich:

$$u_3 : u_1 = (O_3 O_1 \Gamma_2 E_2),$$
$$u_1 : u_2 = (O_1 O_2 \Gamma_3 E_3).$$

Das Verhältnis zweier Linienkoordinaten ist gleich dem Doppelverhältnisse, nach welchem die entsprechende Seite des Koordinatendreiecks durch die zu bestimmende Gerade und die Einheitsgerade geteilt wird.

Übungen:

1) Beschreibt man um den Einheitspunkt $\mathfrak{E}$ einen Kreis, der die drei Seiten O_2O_3, O_3O_1 und O_1O_2 des Koordinatendreiecks der Reihe nach in den Punktepaaren F_1 und F_1', F_2 und F_2', F_3 und F_3' trifft, und zieht man durch den Punkt P die drei Strecken PP_1, PP_2, PP_3 bezw. parallel zu $\mathfrak{E}F_1$, $\mathfrak{E}F_2$, $\mathfrak{E}F_3$ bis zum Schnitt mit der entsprechenden Seite, so verhalten sich PP_1, PP_2, PP_3 wie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Punktes P.

2) Von den Punkten O_1, O_2, O_3 ziehe man drei gleiche Strecken bis zur Einheitsgeraden. Zieht man jetzt von O_1, O_2, O_3 nach einer beliebigen Geraden drei Strecken m_1, m_2, m_3, welche gegen sie der Reihe nach unter denselben Winkeln geneigt sind, wie die ersten Strecken gegen die Einheitsgerade, so verhalten sich diese Strecken wie die Koordinaten dieser Geraden.

3) Wählt man zu Koordinaten eines Punktes die auf die Seiten des Koordinatendreiecks gefällten Senkrechten p_1, p_2, p_3,

so ist der Mittelpunkt des innern Berührungskreises Einheitspunkt, und die Einheitsgerade geht durch die drei Punkte, in denen jedesmal die Halbierungslinie eines Aufsenwinkels die gegenüberliegende Seite trifft.

4) 5) Nachdem das Koordinatendreieck und $\begin{Bmatrix}\text{der Einheitspunkt}\\ \text{die Einheitsgerade}\end{Bmatrix}$ gegeben sind, bestimme man die drei $\begin{Bmatrix}\text{Punkte}\\ \text{Geraden}\end{Bmatrix}$, deren Koordinaten sich verhalten

a) wie $-1 : 1 : 1$
b) wie $1 : -1 : 1$
c) wie $1 : 1 : -1$.

§ 7.

Das vollständige Viereck und das vollständige Vierseit.

1. Vier Punkte der Ebene, von denen keine drei in gerader Linie liegen, bestimmen ein vollständiges Viereck. Diese vier Punkte heifsen die Eckpunkte, die sechs Verbindungslinien von je zwei Eckpunkten die Seiten und die Schnittpunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten die Diagonalpunkte des Vierecks. Ein vollständiges Viereck hat demnach vier Ecken, sechs Seiten und drei Diagonalpunkte. Sind die vier Eckpunkte 1, 2, 3, 4, so sind die Seiten 12, 13, 14, 23, 24, 34 und die Diagonalpunkte I (Schnittpunkt der Seiten 12 und 34), II (Schnittpunkt der Seiten 13 und 24), III (Schnittpunkt der Seiten 14 und 23).

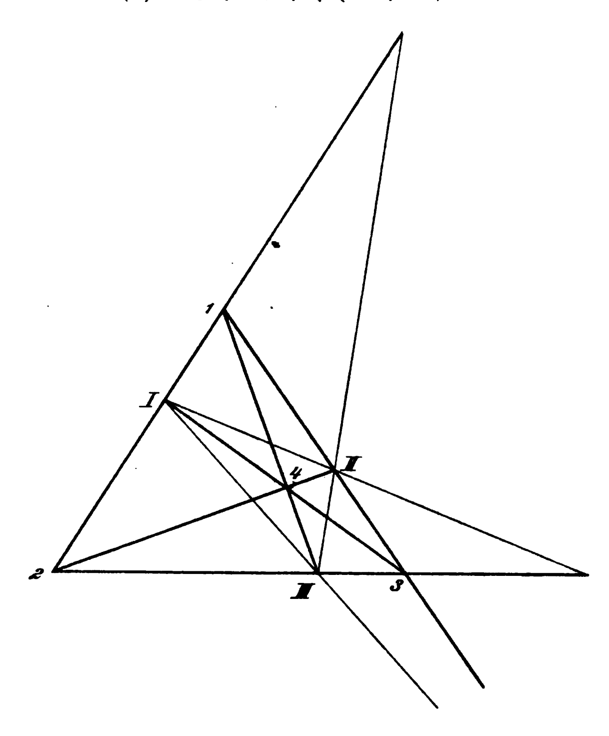
2. Wir wählen die Punkte 1, 2, 3 zu Eckpunkten des Koordinatendreiecks und den Punkt 4 zum Einheitspunkte. Dann haben die vier Punkte 1, 2, 3, 4 der Reihe nach die Gleichungen:

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Da der Punkt I in der Geraden 12 liegt, so ist seine Gleichung in der Form darstellbar: $u_1 + \lambda u_2 = 0$, und da er auch in der Geraden 34 liegt, so kann seine Gleichung auch die Form erhalten: $u_1 + u_2 + u_3 + \mu u_3 = 0$. Damit diese beiden Formen identisch werden, mufs $\lambda = 1$, $\mu = -1$ werden; die Gleichung des Punktes I ist demnach: $u_1 + u_2 = 0$. Ebenso ist die Gleichung des Punktes II: $u_1 + u_3 = 0$ und die des Punktes III: $u_2 + u_3 = 0$.

Jeder Punkt auf der Geraden II III hat die Gleichung:

$$(1) \quad u_1 + u_3 + \varrho (u_2 + u_3) = 0.$$



Diese geht für $\varrho = -1$ in $u_1 - u_2 = 0$ über, stellt also, da der entsprechende Punkt auf der Geraden 12 liegen mufs, den Schnittpunkt der Diagonale II III mit der Seite 12 dar. Geben wir aber in (1) dem Koefficienten ϱ den Wert 1, so wird die Gleichung $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$ auch in der Form

$$u_3 + (u_1 + u_2 + u_3) = 0$$

geschrieben werden können. Die Gleichung (1) stellt also für $\varrho = 1$ den Schnittpunkt der Diagonale II III mit der Geraden 34 dar.

Ebenso stellt die Gleichung

$$u_1 + u_2 + \varrho (u_1 + u_3) = 0$$

für $\varrho = -1$ den Schnittpunkt der Diagonale I II mit der Seite 23 und für $\varrho = 1$ den Schnittpunkt mit der Seite 14 dar. Die Gleichungen der Punkte, in denen die Diagonale I III mit den

Seiten 13 und 24 zusammentrifft, werden erhalten, wenn man in der Gleichung $u_1 + u_2 + \varrho(u_2 + u_3) = 0$ dem Koefficienten ϱ die Werte -1 und $+1$ giebt.

3. Die letzten Gleichungen führen sofort auf den Satz:

Die Verbindungslinie zweier Diagonalpunkte in einem vollständigen Viereck wird durch die Schnittpunkte mit denjenigen beiden Seiten, welche durch keinen der beiden Diagonalpunkte hindurchgehen, harmonisch geteilt.

In der That hat der Diagonalpunkt II die Gleichung: $u_1 + u_3 = 0$ und der Diagonalpunkt III: $u_2 + u_3 = 0$. Man erhält demnach zwei beliebige, zu ihnen harmonisch gelegene Punkte, wenn man dem Koefficienten ϱ in der Gleichung (1) zwei entgegengesetzt gleiche Werte beilegt. Dem Schnittpunkte der Verbindungslinie mit der Seite 12 entspricht aber der Wert $\varrho = -1$, und dem Schnittpunkte mit der Seite 34 der Wert $\varrho = 1$.

In gleicher Weise folgt der Satz für die beiden andern Geraden, durch welche zwei Diagonalpunkte mit einander verbunden werden.

4. Jede Seite eines vollständigen Vierecks wird durch den auf ihr liegenden Diagonalpunkt und den Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der beiden andern Diagonalpunkte harmonisch geteilt.

Offenbar liegen die vier Punkte:

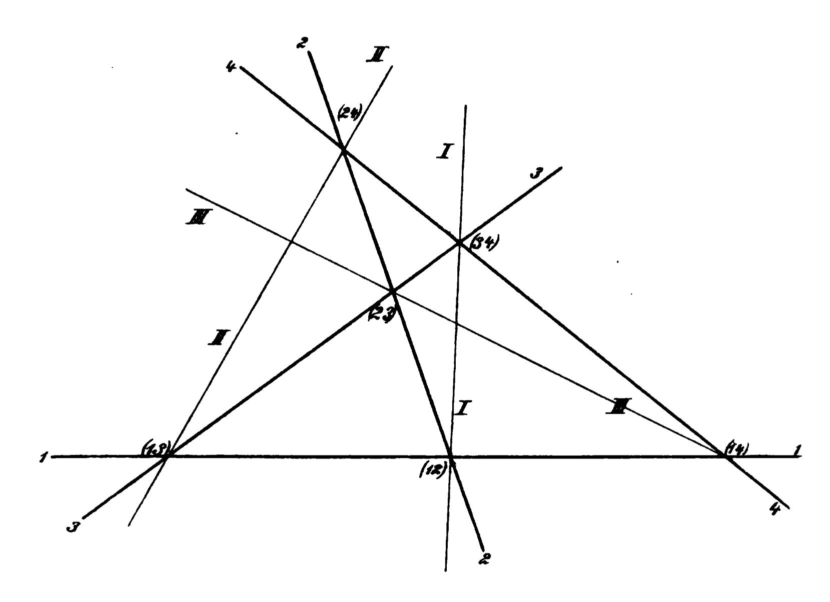
$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_1 + u_2 = 0, \quad u_1 - u_2 = 0$$

zu einander harmonisch. Wie wir eben gesehen haben, stellt die Gleichung $u_1 + u_2 = 0$ den Diagonalpunkt I und die Gleichung $u_1 - u_2 = 0$ den Schnittpunkt mit der Verbindungslinie der Diagonalpunkte II und III dar. — Für die andern Seiten erhält man ähnliche Gleichungen.

5. Vier gerade Linien der Ebene, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen, bilden ein vollständiges Vierseit. Man nennt hier die vier Geraden die Seiten, die sechs Schnittpunkte je zweier Seiten die Eckpunkte und die drei Verbindungslinien von je zwei gegenüberliegenden Eckpunkten die Diagonalen des Vierseits. Indem man die drei ersten Seiten zu den Seiten des Koordinatendreiecks und die vierte zur Ein-

heitsgerade nimmt, haben die vier Seiten der Reihe nach die Gleichungen:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$



Da die Gleichung $x_1 + x_2 = 0$, deren Form sofort zeigt, daſs die entsprechende Gerade durch den Schnittpunkt der beiden ersten Geraden hindurchgeht, auch in der Form geschrieben werden kann: $(x_1 + x_2 + x_3) - x_3 = 0$, so stellt sie die Gerade dar, welche den Schnittpunkt der Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ mit dem Schnittpunkte der Linien $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_3 = 0$ verbindet. Die Gleichungen der drei Diagonalen sind somit:

$$x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_3 = 0.$$

Die Gleichung: $x_1 - x_2 = 0$ kann auch geschrieben werden: $(x_1 + x_3) - (x_2 + x_3) = 0$; die entsprechende Gerade verbindet den Schnittpunkt der Seiten $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ mit dem der Diagonalen $x_1 + x_3 = 0$ und $x_2 + x_3 = 0$. Nun stellen die Gleichungen:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 + x_2 = 0,\ x_1 - x_2 = 0$$

vier harmonische Strahlen dar; es gilt also der Satz:

Zwei Seiten eines vollständigen Vierseits liegen harmonisch zu der von ihrem Schnittpunkte ausgehenden

Diagonale und der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Schnittpunkte der beiden andern Diagonalen.

6. Das vollständige Viereck und das vollständige Vierseit hangen unter einander aufs engste zusammen. So kann man in der Figur auf S. 45 die vier Geraden 12, 23, 34, 41, die zu zweien je einen Eckpunkt gemeinschaftlich haben, als die Seiten eines vollständigen Vierseits auffassen; die Eckpunkte desselben sind die Punkte 1, 2, 3, 4, I, III und die Diagonalen die Geraden (13), (24), (I III). Nach 4. wird die Strecke (13) durch die Schnittpunkte mit den Geraden (24) und (I III) harmonisch geteilt. In der neuen Auffassung ist die Gerade (13) eine Diagonale; die beiden zuletzt erwähnten Punkte sind die Schnittpunkte mit den andern Diagonalen. Daher können wir dem obigen Satze auch folgenden Ausspruch geben:

Jede Diagonale eines vollständigen Vierseits wird durch die beiden andern Diagonalen harmonisch geteilt.

Übungen:

1) Durch blofses Ziehen von geraden Linien zu drei Punkten einer geraden Linie den vierten harmonischen Punkt finden.

2) In drei Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, den vierten harmonischen Strahl konstruieren.

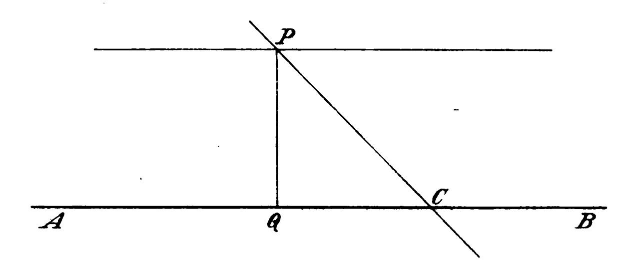
3) Den unzugänglichen Schnittpunkt zweier gegebener geraden Linien mit einem gegebenen Punkte durch eine gerade Linie verbinden.

§ 8.

Die uneigentlichen Gebilde in der Ebene.

1. Während der Satz: Durch zwei Punkte läfst sich eine gerade Linie legen, ganz allgemein gilt, erleidet der Satz: Zwei gerade Linien, die in einer Ebene liegen, schneiden sich in einem Punkte, für den Fall eine Ausnahme, dafs die geraden Linien parallel sind. Daher sind wir genötigt, bei allen Untersuchungen, in denen es sich um den Schnitt zweier gerader Linien handelt, den Fall des Parallelismus gesondert zu behandeln. Wir wollen versuchen, eine Ausdrucksweise einzuführen, durch welche eine einheitliche Behandlung ermöglicht wird.

Zu dem Ende stellen wir mit der Geraden AB zunächst die durch einen festen Punkt P gehende Parallele zusammen und wollen sagen, diese beiden geraden Linien hätten einen uneigentlichen oder idealen Punkt gemeinschaftlich.



Lassen wir eine bewegliche Gerade PC in der Anfangslage mit der Senkrechten PQ zusammenfallen und drehen wir sie so um den festen Punkt P, dafs sie stets in der Ebene PAB bleibt, so entfernt sich ihr Schnittpunkt immer weiter von Q, je näher die Gerade PC an die Parallele heranrückt. Demnach sagen wir, der eingeführte uneigentliche Punkt liege unendlich fern.

2. Aufser diesem unendlichfernen Punkte der Geraden AB, der als der Schnitt mit der durch den Punkt P gezogenen Parallelen betrachtet wird, dürfen wir auf AB keinen weiteren uneigentlichen Punkt annehmen, falls die beiden an die Spitze gestellten Sätze allgemein gelten sollen. Denn nachdem der erwähnte uneigentliche Punkt eingeführt ist, haben wir bereits erreicht, dafs jede durch P gehende gerade Linie mit AB einen Punkt gemeinschaftlich hat. Gäbe es auf AB noch einen weiteren uneigentlichen Punkt, so könnte man durch ihn und den Punkt P eine Gerade l legen, weil der oben zuerst genannte Satz keine Ausnahme erleiden darf. Ein zweiter Punkt, den AB mit l gemeinschaftlich hat, findet sich aber bereits unter der Gesamtheit, welche aus den eigentlichen Punkten und dem zuerst eingeführten uneigentlichen Punkte besteht. Die Geraden AB und l schnitten sich also in zwei Punkten, was unseren Festsetzungen widerspricht.

3. Indem sich die Gerade PC aus der Lage PQ nach der einen Richtung hin dreht, bewegt sich ihr Schnittpunkt mit AB von Q aus in derselben Richtung. Wird PC || AB, so fällt der Schnittpunkt mit dem unendlich fernen Punkte zusammen. Sobald

wir jetzt PC weiter drehen, tritt der Schnittpunkt auf die andere Seite der Geraden AB hinüber. Gleichwie die durch P gehenden Geraden stetig auf einander folgen, vermittelt der unendlichferne Punkt der Geraden AB eine Verbindung der beiden von Q ausgehenden Halbgeraden QA und QB. Irgend zwei eigentliche Punkte der Geraden teilen dieselbe in zwei zusammenhangende Teile, von denen der eine den unendlichfernen Punkt enthält.

4. Ziehen wir zu der Geraden AB eine andere Parallele, so kann diese keinen eigentlichen Punkt mit ihr gemeinschaftlich haben; wir müssen daher annehmen, dafs diese auch den zuerst eingeführten uneigentlichen Punkt enthält. Somit gehen alle parallelen Geraden durch denselben unendlichfernen Punkt. Dieser Punkt vertritt die Richtung der Geraden; statt zu sagen, alle Parallelen seien von gleicher Richtung, sagen wir jetzt, sie hätten denselben unendlichfernen Punkt.

5. Hiernach hat jede gerade Linie einen unendlichfernen Punkt, den sie mit allen zu ihr parallelen Geraden gemeinschaftlich hat. Die unendlichfernen Punkte von zwei sich schneidenden Geraden müssen aber als verschieden betrachtet werden. Denn hätten zwei vom Punkte P ausgehende Gerade denselben unendlichfernen Punkt, so schnitten sie sich in diesem Punkte und im Punkte P; sie hätten also zwei Punkte gemeinschaftlich. Die unendlichfernen Punkte der Ebene bilden somit eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit; man gelangt zu allen diesen Punkten, wenn man auf allen von einem beliebig gewählten eigentlichen Punkte ausgehenden Geraden den unendlichfernen Punkt bestimmt.

6. Um einen gegebenen eigentlichen Punkt mit dem unendlichfernen Punkte einer gegebenen Geraden zu verbinden, hat man durch den Punkt eine Parallele zu der Geraden zu ziehen. Die Aufgabe: durch einen eigentlichen und einen uneigentlichen Punkt eine gerade Linie zu legen, hat also immer eine, und zwar eine einzige Lösung. Hierbei zeigt sich wieder, dafs auf einer geraden Linie, die einen eigentlichen Punkt enthält, nur ein einziger uneigentlicher Punkt liegt. Wir müssen aber auch verlangen, dafs durch zwei uneigentliche Punkte eine gerade Linie gelegt werden kann. Diese enthält, wie wir gesehen haben, keinen eigentlichen Punkt; auf ihr können daher nur uneigentliche Punkte liegen. Sie mufs aber hinwiederum mit jeder eigentlichen Geraden

einen Punkt gemeinschaftlich haben; somit enthält sie alle uneigentlichen Punkte der Ebene. Alle unendlichfernen Punkte der Ebene liegen in einer einzigen uneigentlichen Geraden, der unendlichfernen Geraden der Ebene.

7. Nach diesen Festsetzungen gelten für die Ebene die beiden Sätze ganz allgemein:

a) durch zwei Punkte geht stets eine gerade Linie,

b) zwei verschiedene gerade Linien haben stets einen, und zwar einen einzigen Punkt gemeinschaftlich.

Dagegen hat der Satz, dafs die Ebene durch die gerade Linie in zwei Teile zerlegt wird, seine Gültigkeit verloren. Sind nämlich in der Ebene eine Gerade AB und zwei Punkte C und D gegeben, und gehört keiner dieser Punkte der Geraden an, so wird die gerade Linie CD durch die Punkte C und D in zwei zusammenhangende Stücke zerlegt. Dasjenige Stück, dem der Schnittpunkt mit AB nicht angehört, verbindet die Punkte C und D, ohne durch die Gerade AB hindurchzugehen.

8. Dagegen wird die Ebene durch zwei gerade Linien in zwei Teile zerlegt. Lassen wir nämlich eine Gerade sich um einen ihrer Punkte drehen, so beschreibt sie einen Teil der Ebene. Dieser Teil besteht aber, falls der Punkt ein eigentlicher Punkt ist, aus dem Felde eines Winkels und dem seines Scheitelwinkels; diese beiden Felder bestimmen zusammen einen Teil der Ebene. Daher zerlegen zwei Gerade, die einen eigentlichen Punkt gemein haben, die Ebene in zwei Teile, von denen jeder das Feld eines Winkels und das seines Scheitelwinkels enthält. Zwei parallele Gerade zerlegen die Ebene in zwei Streifen. Dafs eine eigentliche Gerade in Verbindung mit der unendlichfernen Linie die Ebene zerlegt, bedarf keiner Erwähnung.

9. Drei nicht in einem Punkte zusammenstofsende Gerade zerlegen die Ebene in vier Teile. Wir wollen diese Teilung nur in dem Falle näher beschreiben, dafs die drei Schnittpunkte eigentliche Punkte sind. Dann wird jede der drei geraden Linien durch die beiden andern in eine endliche Strecke und zwei Strahlen (Halbgerade) zerlegt. Die drei Schnittpunkte mögen sein O_1, O_2, O_3; die endliche Strecke O_2O_3 möge mit a, die Strecke O_3O_1 mit b, die Strecke O_1O_2 mit c bezeichnet werden. Der Geraden O_2O_3 mögen noch die Strahlen a′ und a″ angehören,

von denen die erste von O_2, die zweite von O_3 ausgeht. Ebenso gehe b' von O_3, b'' von O_1, c' von O_1, c'' von O_2 aus, und b', b, b'' sowie c', c, c'' mögen je eine gerade Linie bilden. Das Innere des Dreiecks $O_1O_2O_3$ wird von den Strecken a, b, c begrenzt. Die Strahlen a' und a'' hangen im Unendlichfernen zusammen; sie können sich also nur vereint an der Abgrenzung eines Ebenenteiles beteiligen. Nun mufs sich an das Innere des Dreiecks ein Teil anschliefsen, zu dessen Grenze die Strecke a gehört; die übrige Grenze wird gebildet aus zwei unendlich grofsen Strecken, von denen die eine aus den Teilen b' und b'', die andere aus den Teilen c' und c'' besteht. In entsprechender Weise gelangen wir zu zwei weiteren Raumteilen, von denen der eine von b, a' + a'', c' + c'', der andere von c, a' + a'', b' + b'' begrenzt wird. Von den in der Fig. 4 (S. 9) unterschiedenen sieben Teilen vereinigen sich die Teile II und V, III und VI, IV und VII jedesmal im Unendlichen zu einem einzigen Teile.

Von den vier Teilen, in welche hiernach die Ebene zerfällt, hat einer drei endliche Strecken und jeder andere eine endliche und zwei unendliche Strecken zur Grenze.

Übungen:

1) Jedes nach der Vorschrift von § 5 eingeführte Koordinatensystem hat einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Einheitspunkt und eine (eigentliche oder uneigentliche) Einheitsgerade.

2) Für die in der Übung 4) zu § 5 eingeführten Möbiusschen Koordinaten fällt der Einheitspunkt mit dem Schwerpunkte, die Einheitsgerade mit der unendlichfernen Linie zusammen.

3) Wie wird die Ebene durch zwei sich schneidende eigentliche Gerade und die unendlichferne Gerade zerlegt?

4) Indem man die Ebene im Unendlichen als zusammenhangend ansieht, sollen die Zerlegungen angegeben werden, welche ausgeführt werden:

a) durch drei Gerade, welche durch denselben Punkt gehen,

b) durch drei parallele Geraden,

c) durch zwei parallele und eine sie schneidende Gerade.

(Man zeige, dafs die Fälle a) und b) wesentlich übereinstimmen und dafs c) auf den in 9. behandelten Fall hinauskommt.)

5) So sehr die Theorie der eigentlichen mit der der uneigentlichen Punkte übereinstimmt, ist es doch nicht möglich, Konstruktionen, bei denen unendlichferne Punkte vorkommen, genau so auszuführen, wie die entsprechenden Konstruktionen für eigentliche Punkte. So kann man durch bloſsen Gebrauch des Lineals zwei eigentliche Punkte auch dann durch eine gerade Linie verbinden, falls einer von ihnen unzugänglich ist (§ 7, Üb.). Dagegen bedarf man zur Lösung der Aufgabe, einen eigentlichen und einen uneigentlichen Punkt mit einander durch eine Gerade zu verbinden, notwendig des Zirkels, falls nicht ein sonstiger Ersatz geboten ist. Die Aufgabe: durch einen Punkt zu einer Geraden die Parallele zu ziehen, kann an sich ohne Gebrauch des Zirkels nicht gelöst werden. Dagegen kann man durch bloſses Ziehen von geraden Linien die Aufgabe lösen:

Nachdem zwei zu einander parallele Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt der Ebene die zu ihnen parallele Gerade zu ziehen. (Die Lösung dieser Aufgabe wird erleichtert durch die der beiden folgenden.)

6) Nachdem auf einer Geraden drei Punkte gegeben sind, von denen der eine in der Mitte zwischen den beiden andern liegt, soll mit bloſser Anwendung des Lineals durch einen beliebigen Punkt zu der Geraden eine Parallele gezogen werden.

7) Wenn irgend zwei parallele Geraden gegeben sind, soll eine beliebige, in einer von ihnen gelegene Strecke durch bloſses Ziehen von geraden Linien halbiert werden.

§ 9.

Die Doppelverhältnisse bei uneigentlichen Gebilden.

1. Eine gerade Strecke AB wird durch jeden Punkt C, der zwischen A und B (auf der endlichen Strecke AB) liegt, nach einem Verhältnis geteilt, das einen positiven Wert hat. Liegt aber der Punkt C auf der Verlängerung über A hinaus, so ist das Schnittverhältnis negativ und < -1; dagegen ist sein Wert zwischen 0 und -1 enthalten, falls der Punkt C in der Richtung BA über A hinaus liegt. Es giebt aber keinen eigentlichen Punkt, für den das Schnittverhältnis gleich -1 ist; es liegt also an sich nahe, diesen Wert des Schnittverhältnisses der Teilung

durch den unendlichfernen Punkt zuzuordnen. Die Art, wie dieser Punkt vorhin eingeführt ist, nötigt auch dazu. Je weiter sich nämlich der Punkt C in der einen oder der andern Richtung auf AB von den Punkten A und B entfernt, um so näher kommt das Schnittverhältnis dem Werte — 1. Der unendlichferne Punkt vermittelt aber den Übergang von der einen zur andern Richtung; daher mufs auch der Wert des Schnittverhältnisses sich stetig ändern, wenn man durch den unendlichfernen Punkt hindurchgeht. Das geschieht aber nur, wenn man dem Schnittverhältnis in diesem Punkte den Wert — 1 beilegt. Durch diese Festsetzung ist die Möglichkeit geschaffen, eine endliche Strecke AB nach jedem beliebigen Schnittverhältnisse zu teilen, und zwar entspricht jedem Werte des Verhältnisses ein einziger Punkt.

2. Der Mitte einer Strecke ist in Bezug auf die beiden Endpunkte als vierter harmonischer Punkt der unendlichferne Punkt der Geraden zugeordnet. Denn für die Mitte M von AB ist der Quotient AM : MB = 1. Für den zugeordneten harmonischen Punkt N mufs AN : NB = — 1, also N der unendlichferne Punkt sein. Man kann also jetzt allgemein zu drei beliebigen Punkten einer Geraden den vierten harmonischen Punkt finden. Auch gilt jetzt der Satz allgemein, dafs vier harmonische Strahlen von einer in ihrer Ebene gelegenen Geraden in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. Ist nämlich die Transversale einem der vier Strahlen parallel, so trifft sie diesen in ihrem unendlichfernen Punkte; zugleich wird aber der zugeordnete Strahl durch die Mitte der von den beiden andern Strahlen auf der Transversalen begrenzten Strecke gehen.

3. Ebenso giebt es, wenn A, B, C drei eigentliche Punkte auf einer geraden Linie sind, keinen eigentlichen Punkt D, für den das Doppelverhältnis gleich — AC : CB wird. Da aber das Schnittverhältnis AD : DB = — 1 wird, falls D in den unendlichfernen Punkt fällt, so wird für diese Wahl des Punktes D das Doppelverhältnis (ABCD) = — AC : CB.

Nachdem drei eigentliche von einander verschiedene Punkte A, B, C auf einer Geraden gegeben sind, giebt es jetzt stets einen einzigen Punkt D, für den das Doppelverhältnis (ABCD) einen vorgeschriebenen Wert hat. Das Doppelverhältnis nimmt nur den Wert null an, wenn D mit B zusammenfällt; es kann nur ∞

werden, wenn D die Lage des Punktes A erhält. Fällt D auf C, so wird es gleich eins. Wenn der Punkt D seine Lage stetig ändert, so erleidet auch das Doppelverhältnis eine stetige Änderung; dasselbe ist auch beim Durchgange durch den unendlichfernen Punkt der Fall.

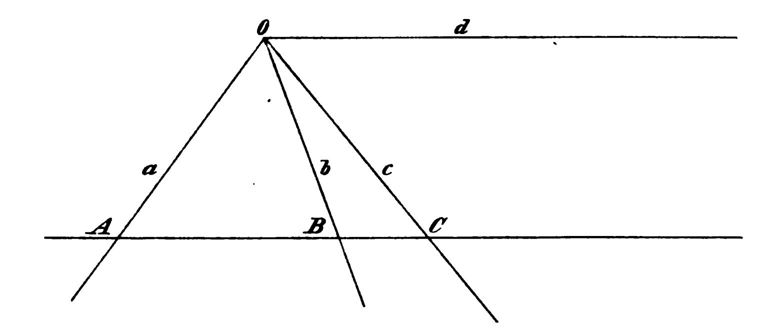
Hiernach gilt der Satz allgemein, dafs irgend vier Strahlen eines Punktes durch jede Gerade der Ebene in vier Punkten geschnitten wird, deren Doppelverhältnis gleich dem der vier Strahlen ist. Wenn nämlich die Transversale dem Strahle d parallel ist, so mufs sein:

$$\frac{\sin(ac)}{\sin(ad)} = \pm \frac{AC}{OC}, \quad \frac{\sin(cb)}{\sin(cb)} = \mp \frac{CB}{OC},$$

also

$$(abcd) = -\frac{AC}{CB} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

wofern D der unendlichferne Punkt der Geraden AB ist.



4. Ist der Punkt A ein eigentlicher, der Punkt B der uneigentliche Punkt der Geraden g, so können wir den Begriff des Schnittverhältnisses auf die Teilung der Strecke AB nicht anwenden. Ist nämlich C ein eigentlicher Punkt dieser Geraden, so hat das Verhältnis $\frac{AC}{CB}$ stets den Wert null. Dagegen bleibt die Bedeutung des Doppelverhältnisses ungeändert. Sind nämlich C und D wieder zwei eigentliche Punkte, so ist

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{AD} : \frac{CB}{DB} = \frac{AC}{AD},$$

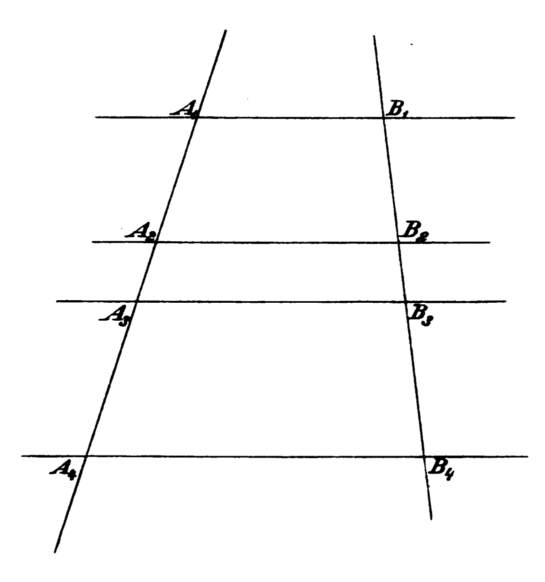
weil B, wie wir angenommen haben, der unendlichferne Punkt ist.

Die am Schlusse der vorigen Nummer durchgeführte Konstruktion überzeugt uns (bei Vertauschung der Buchstaben D und B), dafs die vier Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte der Ebene nach den Punkten A, B, C, D gezogen werden können, dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die Punkte selbst.

5. Liegen vier Punkte auf der unendlichfernen Geraden, so kann man durch jeden Punkt ein Quadrupel von Geraden nach ihnen ziehen. Alle solche Quadrupel haben dasselbe Doppelverhältnis, weil die Winkel wegen des Parallelismus der Schenkel einander gleich sind.

6. Da alle unter einander parallelen Geraden durch denselben unendlichfernen Punkt gehen, so müssen wir die Gesamtheit der Geraden, die einer festen Richtung parallel sind, als einen Büschel ansehen, dessen Scheitel im Unendlichfernen liegt. Auch hier bestimmen vier Gerade ein festes Doppelverhältnis. Werden nämlich vier parallele Geraden durch eine Transversale in den Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 und von einer zweiten in den Punkten B_1, B_2, B_3, B_4 geschnitten, so verhält sich

$$\frac{A_1A_3}{A_3A_2} = \frac{B_1B_3}{B_3B_2}, \quad \frac{A_1A_4}{A_4A_2} = \frac{B_1B_4}{B_4B_2},$$



also ist auch

$$\frac{A_1 A_3}{A_3 A_2} : \frac{A_1 A_4}{A_4 A_2} = \frac{B_1 B_3}{B_3 B_2} : \frac{B_1 B_4}{B_4 B_2}$$

oder $(A_1 A_2 A_3 A_4) = (B_1 B_2 B_3 B_4)$.

Dieser Satz bleibt auch bestehen, wenn eine der vier parallelen Geraden, etwa die Gerade 4, durch die unendlichferne Gerade ersetzt wird, weil dann

$$\frac{A_1 A_4}{A_4 A_2} = \frac{B_1 B_4}{B_4 B_2} = -1 \text{ ist.}$$

Übungen:

1) Man gebe die Sätze für das vollständige Viereck an, wenn einer oder zwei seiner Eck- oder seiner Diagonalpunkte ins Unendlichferne fallen.

2) Man lasse eine Seite oder eine Diagonale des vollständigen Vierseits mit der unendlichfernen Geraden zusammenfallen.

§ 10.

Die Koordinaten der unendlichfernen Punkte.

1. Da die Verhältnisse der Koordinaten für jeden Punkt sich in § 7 als Doppelverhältnisse dargestellt haben und diese nach § 9 auch für unendlichferne Punkte angegeben werden können, so lassen sich die Verhältnisse der Koordinaten auch für unendlichferne Punkte bestimmen. Um die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ für den unendlichfernen Punkt der Geraden MN zu erhalten, ziehen wir durch die Eckpunkte O_1, O_2, O_3 des Koordinatendreiecks zu MN die Parallelen O_1F_1, O_2F_2, O_3F_3 (vgl. die Figur der folgenden Seite); dann ist der Bruch $x_1 : x_2$ gleich dem Doppelverhältnis der vier Strahlen O_3O_2, O_3O_1, O_3F_3 und O_3E; ebenso ist $x_3 : x_1 = (O_2 : O_1O_3F_2E)$ und $x_2 : x_3 = (O_1 : O_3O_2F_1E)$.

2. Diese drei Verhältnisse können jedoch nur dann als Ersatz für die Koordinaten dienen, wenn ihr Produkt gleich eins ist. Setzt man

$$\frac{x_2}{x_3} = \lambda, \ \frac{x_3}{x_1} = \mu, \ \frac{x_1}{x_2} = \nu,$$

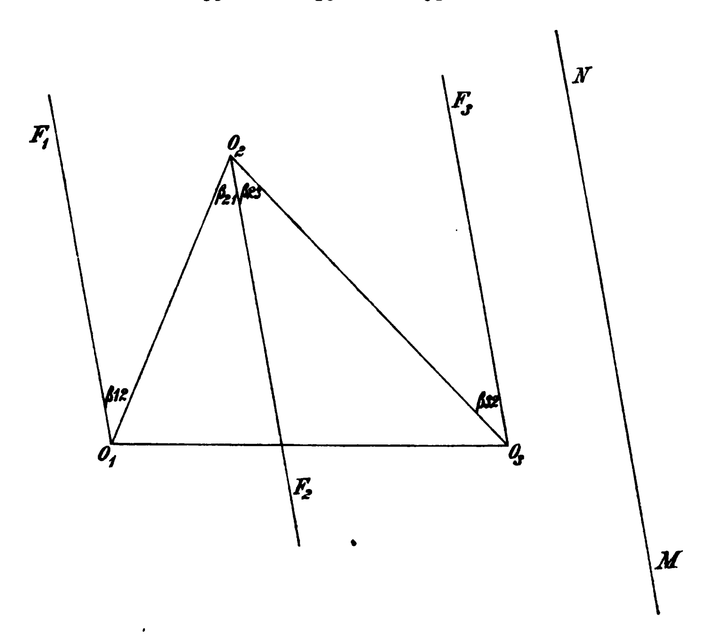
so mufs die Bedingung erfüllt sein:

$$\lambda\mu\nu = 1.$$

Um die Richtigkeit dieser Beziehung nachzuweisen, bezeichnen wir den Winkel, welchen die Seite O_1O_2 mit O_1E bildet, durch

α_{12}, entsprechend den Winkel zwischen O_1O_3 und O_1E mit α_{13}, und führen in gleicher Weise die Winkel α_{21}, α_{23}, α_{31}, α_{32} ein. Ebenso soll der Winkel zwischen O_1O_2 und O_1F_1 mit β_{12}, der Winkel (O_1O_3, O_1F_1) durch β_{13}, der Winkel (O_2O_3, O_2F_2) durch β_{23} u. s. w. bezeichnet werden, wo $O_1F_1 \parallel O_2F_2 \parallel O_3F_3 \parallel MN$ ist. Indem wir vom Punkte E die Senkrechten auf die drei Seiten des Dreiecks $O_1O_2O_3$ fällen, erkennen wir, dafs

$$\frac{\sin \alpha_{12}}{\sin \alpha_{13}} \cdot \frac{\sin \alpha_{23}}{\sin \alpha_{21}} \cdot \frac{\sin \alpha_{31}}{\sin a_{32}} = 1 \text{ ist.}$$



Wegen des Parallelismus der drei Geraden A_1F_1, A_2F_2 und A_3F_3 ist aber

$$\frac{\sin \beta_{12}}{\sin \beta_{13}} \cdot \frac{\sin \beta_{23}}{\sin \beta_{21}} \cdot \frac{\sin \beta_{31}}{\sin \beta_{32}} = 1.$$

Nun ist

$$\lambda = \frac{\sin \beta_{13}}{\sin \beta_{12}} : \frac{\sin \alpha_{13}}{\sin \alpha_{12}}, \quad \mu = \frac{\sin \beta_{21}}{\sin \beta_{23}} : \frac{\sin \alpha_{21}}{\sin \alpha_{23}},$$

$$\nu = \frac{\sin \beta_{32}}{\sin \beta_{31}} : \frac{\sin \alpha_{32}}{\sin \alpha_{31}}.$$

Daraus folgt in der That, dafs das Produkt $\lambda\mu\nu = 1$ ist.

3. Wir weisen jetzt nach, dafs jeder Punkt durch die Verhältnisse der Koordinaten eindeutig bestimmt ist. Zu dem Ende beachten wir, dafs jeder homogenen linearen Gleichung, in der nur zwei von den drei Variabeln x_1, x_2, x_3 vorkommen, eine eigentliche gerade Linie entspricht. Wir ersetzen demnach in der Gleichung $x_3 = \varkappa x_2$ die Koordinaten x_2 und x_3 durch ihre Werte $\mu_2 p_2$ und $\mu_3 p_3$. Dadurch geht die Gleichung über in

$$p_3 : p_2 = \varkappa\mu_2 : \mu_3.$$

Diese Gleichung stellt den geometrischen Ort des Punktes dar, dessen Abstände von den Geraden O_1O_2 und O_1O_3 in dem gegebenen Verhältnisse $\varkappa\mu_2 : \mu_3$ stehen; dieser Ort besteht in einer geraden Linie, die durch den Punkt O_1 geht und leicht konstruiert werden kann. In ähnlicher Weise finden wir die geraden Linien $x_3 = \lambda x_1$ und $x_1 = \mu x_2$.

Soll jetzt sein:

$$(1)\quad x_1 : x_2 : x_3 = k_1 : k_2 : k_3,$$

so konstruiere man die geraden Linien:

$$(2)\quad x_2 : x_3 = k_2 : k_3 \text{ und } x_3 : x_1 = k_3 : k_1.$$

Wenn diese nicht parallel sind, so ist ihr Schnittpunkt der gesuchte Punkt. Da dieser auch in der geraden Linie

$$(3)\quad x_1 : x_2 = k_1 : k_2$$

liegt, so ist es gleichgültig, welche beiden Linien wir zu seiner Konstruktion benutzen.

Sind aber die beiden Geraden (2) parallel, so gehört zu den Verhältnissen (1) der unendlichferne Schnittpunkt dieser Linien. Dann geht schon aus 2 hervor, dafs auch die Gerade (3) zu den Geraden (2) parallel ist. Wir können uns davon aber auch in folgender Weise überzeugen. Angenommen, die Gerade (3) schnitte die zweite Gerade (2) in einem eigentlichen Punkte, so gälten für den Schnittpunkt die Beziehungen (1); der Punkt läge also auch auf der ersten Geraden (2). Die beiden Geraden wären somit nicht parallel, was wir doch angenommen haben.

4. Der durch die Verhältnisse (1) bestimmte Punkt wird dann (und nur dann) ein uneigentlicher Punkt, wenn die Gleichung besteht (§ 5, 5 S. 28):

$$(4)\quad \frac{k_1}{c_1} + \frac{k_2}{c_2} + \frac{k_3}{c_3} = 0.$$

Im andern Falle, wo die linke Seite von (4) einen von null verschiedenen Wert ω hat, erhält man für die Koordinaten die Werte:

$$x_1 = \frac{k_1}{\omega},\ x_2 = \frac{k_2}{\omega},\ x_3 = \frac{k_3}{\omega};$$

man findet also einen eigentlichen Punkt.

Zu demselben Ergebnisse führt auch die folgende Erwägung. Sind (x_1', x_2', x_3') und (x_1'', x_2'', x_3'') zwei eigentliche Punkte, so verhalten sich die Koordinaten desjenigen Punktes, in welchem die von ihnen begrenzte Strecke nach dem Verhältnisse ϱ geteilt wird, wie

$$x_1' + \varrho x_1'' : x_2' + \varrho x_2'' : x_3' + \varrho x_3''.$$

Diese Verhältnisse führen nach § 9, 2 auf den unendlichfernen Punkt der Geraden, wenn $\varrho = -1$ ist. Da aber die beiden gegebenen Punkte eigentliche Punkte sind, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{x_1'}{c_1} + \frac{x_2'}{c_2} + \frac{x_3'}{c_3} = 1,\ \frac{x_1''}{c_1} + \frac{x_2''}{c_2} + \frac{x_3''}{c_3} = 1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{x_1' - x_1''}{c_1} + \frac{x_2' - x_2''}{c_2} + \frac{x_3' - x_3''}{c_3} = 0,$$

was mit der Gleichung (4) übereinstimmt.

5. Um von jetzt an die eigentlichen und die uneigentlichen Punkte in der analytischen Behandlung nicht zu unterscheiden, ist es angebracht, alle Punkte durch die Verhältnisse der Koordinaten zu bestimmen. Wir verstehen also jetzt unter dem Punkte (x_1', x_2', x_3') denjenigen Punkt, dessen Koordinaten sich wie die Gröfsen $x_1' : x_2' : x_3'$ verhalten; durch die beiden Tripel x_1', x_2', x_3' und $\varrho x_1', \varrho x_2', \varrho x_3'$ soll für irgend einen von null verschiedenen Wert ϱ derselbe Punkt dargestellt werden. Dann dürfen wir aber auch bei der analytischen Behandlung nur solche Gleichungen benutzen, welche sich nicht ändern, wenn wir die drei Gröfsen x_1, x_2, x_3 mit einer beliebigen Zahl multiplizieren; mit andern Worten, alle unsere Gleichungen müssen homogen sein.

Die Bedingung (4), welche erfüllt sein mufs, wenn der durch die Gleichungen (1) bestimmte Punkt ein uneigentlicher Punkt sein soll, nimmt jetzt die Gestalt an:

$$(5)\quad \frac{x_1}{c_1} + \frac{x_2}{c_2} + \frac{x_3}{c_3} = 0.$$

Diese Gleichung stellt die Gesamtheit der unendlichfernen Punkte, die unendlichferne Gerade dar.

6. Wir haben früher gesehen, dafs die Gleichung einer jeden geraden Linie die Form hat:

$$(6) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0;$$

wir haben aber noch nicht gezeigt, dafs umgekehrt jede Gleichung von dieser Form eine Gerade darstellt. Nun haben wir soeben gesehen, dafs diese Gleichung der unendlichfernen Geraden angehört, wenn sich verhält $a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{c_1} : \frac{1}{c_2} : \frac{1}{c_3}$. In allen andern Fällen giebt es nur ein Wertsystem $x_1 : x_2 : x_3$, welches den beiden Gleichungen (5) und (6) genügt, nämlich

$$\left(\frac{a_2}{c_3} - \frac{a_3}{c_2}\right) : \left(\frac{a_3}{c_1} - \frac{a_1}{c_3}\right) : \left(\frac{a_1}{c_2} - \frac{a_2}{c_1}\right).$$

Alle andern Werte, welche der Gleichung (6) genügen, stellen eigentliche Punkte dar; unter anderm kann man auf mindestens zwei Seiten des Koordinatendreiecks einen Punkt bestimmen, dessen Koordinaten die Gleichung (6) befriedigen; die Gleichung führt also auf eine eigentliche gerade Linie.

Da die Gleichung (6) eine einzige gerade Linie bestimmt, so entspricht auch einem jeden Verhältnisse der Koordinaten u_1, u_2, u_3 eine einzige Gerade. Wir werden daher auch bei den Koordinaten der geraden Linie von den Werten selbst absehen und nur die Verhältnisse berücksichtigen. Dann müssen wir aber auch bei Anwendung von Linienkoordinaten nur solche Gleichungen benutzen, die in den Gröfsen u_1, u_2, u_3 homogen sind.

7. Um die Koordinaten x_1, x_2, x_3 zu erhalten, haben wir in § 5 die früher eingeführten Senkrechten p_1, p_2, p_3 mit festen Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 multipliziert. Nachdem wir jetzt gesehen haben, dafs einerseits die Verhältnisse der Koordinaten zur Bestimmung eines jeden Punktes genügen, andererseits für die uneigentlichen Punkte nur diese Verhältnisse, aber nicht die absoluten Werte der Koordinaten gefunden werden können, haben wir die Gröfsen x_1, x_2, x_3 noch mit einer ganz willkürlichen und daher auch veränderlichen Gröfse ϱ multipliziert. Indem wir dies thun, ersetzen wir bei beliebigem Werte von ϱ die früher benutzten Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 durch $\frac{\mu_1}{\varrho}$, $\frac{\mu_2}{\varrho}$, $\frac{\mu_3}{\varrho}$. Demnach können

wir auch festsetzen, die Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 sollten ganz beliebig sein und nur in einem festen Verhältnisse stehen.

In gleicher Weise dürfen wir festsetzen, dafs die Koefficienten ν_1, ν_2, ν_3, mit denen die Senkrechten r_1, r_2, r_3 multipliziert werden, um die Koordinaten u_1, u_2, u_3 zu erhalten, nur unveränderliche Verhältnisse besitzen und den Gleichungen genügen sollen: $\mu_1 \nu_1 h_1 = \mu_2 \nu_2 h_2 = \mu_3 \nu_3 h_3$.

Bei diesen Festsetzungen dürfen wir bei unsern Untersuchungen nur homogene Gleichungen benutzen; daher nennen wir die auf diese Weise erhaltenen Koordinaten selbst homogene Koordinaten.

Übungen:

1) Der Einheitspunkt falle mit dem Schwerpunkt des Koordinatendreiecks zusammen; man konstruiere die Punkte (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, — 1, 0), (1, 1, — 1), (1, 1, 2), (1, 2, 3), (1, 2, — 3), (— 1, 2, 3).

2) Zu den in 1) angegebenen Koordinatenverhältnissen suche man die entsprechenden Punkte, falls der Mittelpunkt des innern Berührungskreises der Einheitspunkt ist; aufserdem gebe man die Lage folgender Punkte an: (h_1, h_2, h_3), $(h_1, h_2, -2h_3)$, $(h_1, h_2, 0)$, wo h_1, h_2, h_3 die Höhen des Koordinatendreiecks sind.

3) Bei beliebiger Wahl des Koordinatendreiecks und des Einheitspunktes konstruiere man die in 1) angegebenen Punkte.

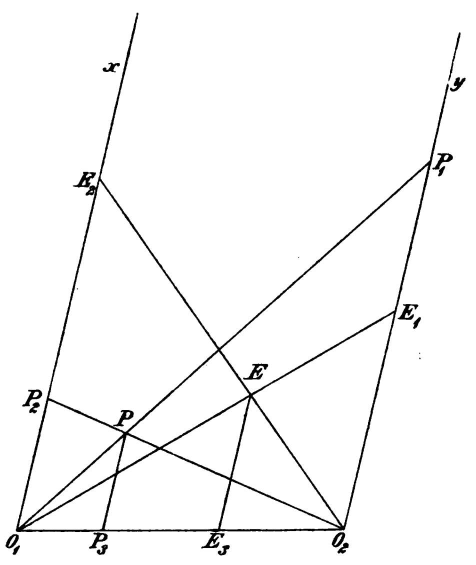
4) Indem man die Einheitslinie mit der unendlichfernen Geraden zusammenfallen läfst, bestimme man die Verhältnisse der Koordinaten a) der Mittellinien des Koordinatendreiecks, b) derjenigen Geraden, durch die zwei Seiten dieses Dreiecks halbiert werden, c) derjenigen Linien, welche durch je einen Eckpunkt parallel zu einer von einem andern Eckpunkte ausgehenden Mittellinie gezogen werden.

§ 11.

Koordinatendreiecke mit unendlichfernen Eckpunkten.

1. Wir haben bisher angenommen, die drei Eckpunkte des Koordinatendreiecks seien eigentliche Punkte. Auch von dieser Annahme können wir uns unabhängig machen. Setzen wir z. B. voraus, der Eckpunkt O_3 sei ein unendlichferner Punkt, nämlich der gemeinschaftliche Punkt der beiden Parallelen O_1X und O_2Y,

so behalten die Senkrechten p_1, p_2, p_3 auf die drei Axen für jeden eigentlichen Punkt endliche Werte. Wir können daher die Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch Multiplikation mit den Koefficienten μ_1, μ_2, μ_3 einführen. Auch lassen sich jetzt die Verhältnisse der Koordinaten leicht finden, sobald aufser den Eckpunkten des Koordinatendreiecks der Einheitspunkt gegeben ist. Der Leser wird sich diese Beziehungen mit Hilfe der nebenstehenden Figur, worin der Punkt E eine ganz beliebige Lage hat, selbst klar machen.



Es ist jedoch vorteilhafter, dem Einheitspunkte E eine bestimmte Lage zu geben. Zu dem Ende tragen wir auf dem negativen Teile von O_1X und O_2Y je eine Strecke O_1E_2 und O_2E_1 gleich der Längeneinheit ab und nehmen den Schnittpunkt E der Geraden O_1E_1 und O_2E_2 zum Einheitspunkte. Wenn dann noch O_2Y von O_1P in P_1, O_1X von O_2P in P_2 geschnitten wird, so ist:

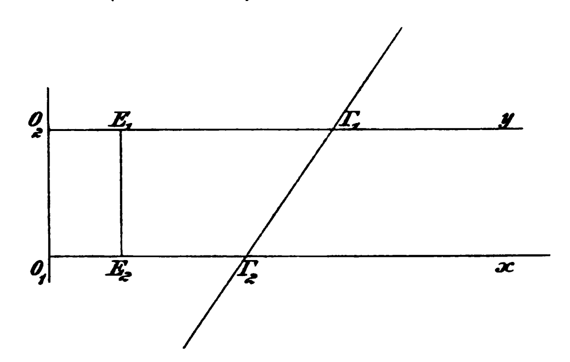
$$\frac{x_1}{x_3} = (O_3O_1P_2E_2) = \frac{O_3P_2}{P_2O_1} : \frac{O_3E_2}{E_2O_1} = \frac{O_3P_2}{O_3E_2} : \frac{P_2O_1}{E_2O_1} = -\frac{1}{O_1P_2},$$

$$\frac{x_2}{x_3} = (O_3O_2P_1E_1) = \frac{O_3P_1}{P_1O_2} : \frac{O_3E_1}{E_1O_2} = \frac{O_3P_1}{O_3E_1} : \frac{P_1O_2}{E_1O_2} = -\frac{1}{O_2P_1},$$

da einerseits der Punkt O_3 der unendlichferne Schnittpunkt der Geraden O_1X und O_2Y, andererseits $O_1E_2 = O_2E_1 = -1$ ist. Demnach kann man die Lage eines jeden Punktes P durch die negativen reciproken Abschnitte bestimmen, welche die Geraden O_2P und O_1P auf den Axen O_1X und O_2Y abschneiden.

2. Bei der eben getroffenen Wahl des Einheitspunktes ist die Einheitsgerade zu O_1O_2 parallel und trifft O_1X in E_2, O_2Y in E_1 so, dafs $O_1E_2 = O_2E_1 = +1$ ist. Für eine Gerade, welche O_1X in Γ_2, O_2Y in Γ_1, O_1O_2 in Γ_3 schneidet, ist

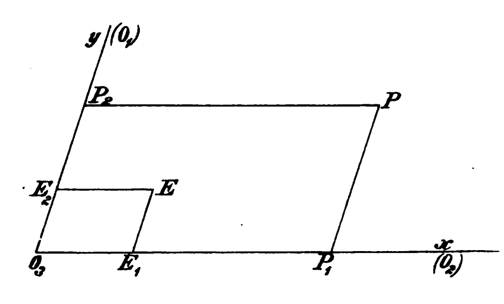
$$u_2 : u_3 = (O_2 O_3 \Gamma_1 E_1) = O_2\Gamma_1 : O_1 E_2 = O_2\Gamma_1,$$
$$u_1 : u_3 = (O_1 O_3 \Gamma_2 E_2) = O_1\Gamma_2 : O_2 E_1 = O_1\Gamma_2,$$
$$u_1 : u_2 = (O_1 O_2 \Gamma_3 E_3) = O_1\Gamma_3 : O_2\Gamma_3.$$



Setzen wir jetzt $u_1 : u_3 = u$, $u_2 : u_3 = v$, so stellen diese Gröfsen für eine nicht zu O_1X parallele Gerade die von ihr auf den beiden Axen O_1X und O_2Y gebildeten Abschnitte dar. Eine zu O_1X parallele Gerade ist durch das Verhältnis $u : v$ bestimmt, und dies ist gleich dem auf der Strecke O_1O_2 erzeugten Schnittverhältnisse.

Dies Koordinatensystem ist von Schwering zuerst aufgestellt und in seinem Buche: Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten (Leipzig 1884) benutzt.

3. Wir legen jetzt die beiden Punkte O_1 und O_2 ins Unendlichferne. Dann wird zwar die Senkrechte p_3 unendlich, aber die Verhältnisse der Koordinaten x_1, x_2, x_3 bleiben endlich. Der Einfachheit wegen empfiehlt es sich, den Einheitspunkt E in die Halbierungslinie des Winkels $O_1O_3O_2$ so zu legen, dafs die beiden von E ausgehenden Strecken EE_1 und EE_2, welche je einer Axe parallel sind und bis zur andern Axe gehen, die Länge eins haben. Um das Verhältnis $x_2 : x_3$ zu bestimmen, ziehen wir $PP_1 \parallel O_2O_3$ bis zum Schnittpunkte P_1



mit O_2O_3. Ebenso liegt P_2 in O_1O_3 und PP_2 ist zu O_2O_3 parallel. Dann gelten die Gleichungen:

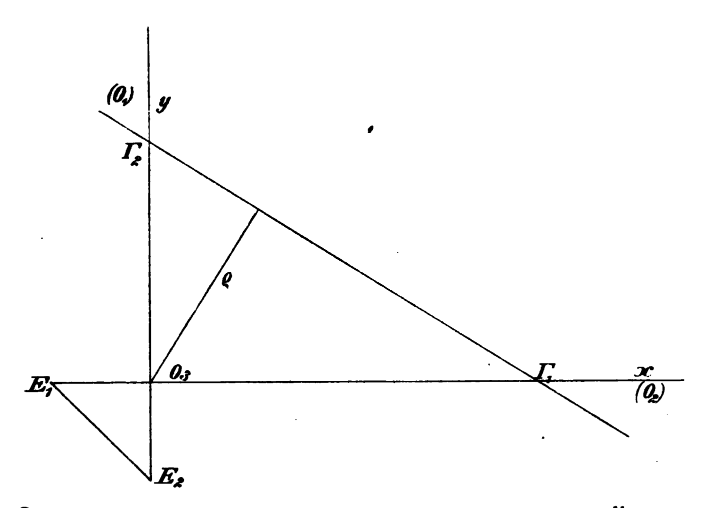
$$x_2 : x_3 = (O_3O_2P_1E_1) = O_3P_1 : O_3E_1 = O_3P_1,$$
$$x_1 : x_3 = (O_3O_1P_2E_2) = O_3P_2 : O_3E_2 = O_3P_2.$$

Setzt man $x_2 : x_3 = x$, $x_1 : x_3 = y$, so stellen x und y die Cartesischen Koordinaten dar, welche allgemein bekannt sind.

Für einen uneigentlichen Punkt ist $x_3 = 0$ und der Bruch $x_1 : x_2$ hat einen bestimmten Wert. Einen unendlichfernen Punkt bestimmt man demnach durch das Verhältnis x : y.

4. Der Punkt $\mathfrak{E}_1$, in welchem die Einheitsgerade die Axe O_2O_3 schneidet, liegt zu E_1 in Bezug auf die Punkte O_2O_3 harmonisch. Daher ist $O_3\mathfrak{E}_1 = -1$. Ebenso ist $O_3\mathfrak{E}_2 = -1$, wenn die Axe O_3O_1 in $\mathfrak{E}_2$ von der Einheitsgeraden getroffen wird. Schneidet eine beliebige Gerade die Axen O_2O_3 und O_1O_3 in den Punkten Γ_1 und Γ_2, so ist

$$\frac{u_2}{u_3} = (O_2O_3\Gamma_1\mathfrak{E}_1) = \frac{O_3\mathfrak{E}_1}{O_3\Gamma_1} = -\frac{1}{O_3\Gamma_1},$$
$$\frac{u_1}{u_3} = (O_2O_3\Gamma_2\mathfrak{E}_2) = \frac{O_3\mathfrak{E}_2}{O_3\Gamma_2} = -\frac{1}{O_3\Gamma_2}.$$



Setzt man $u = -u_2 : u_3$, $v = -u_1 : u_3$, so stellen u und v die reciproken Abschnitte dar, welche durch die Gerade auf den Axen vom Anfangspunkte O_3 aus gebildet werden. Es sind dies die Plückerschen Koordinaten einer geraden Linie.

5. Unter der speciellen Annahme, dafs die Axen O_3O_2 und O_3O_1 auf einander senkrecht stehen, können wir den Gröfsen u_1, u_2, u_3 eine feste geometrische Bedeutung geben. Zu dem Ende denken wir die Ebene durch die Gerade in einen positiven und einen negativen Teil zerlegt, geben der von O_3 auf die Gerade gefällten Senkrechten ϱ das positive oder negative Zeichen, jenachdem O_3 im positiven oder negativen Teile liegt, und bezeichnen mit ε den Winkel, welchen die nach dem positiven Teile sich erstreckende Richtung der Senkrechten mit der positiven Axe O_3O_2 bildet. Alsdann ist:

$$\frac{u_2}{u_3} = -\frac{1}{O_3\Gamma_1} = \frac{\cos\varepsilon}{\varrho},\ \frac{u_1}{u_3} = -\frac{1}{O_3\Gamma_2} = +\frac{\sin\varepsilon}{\varrho}.$$

Demnach dürfen wir $u_1 = \sin\varepsilon$, $u_2 = \cos\varepsilon$, $u_3 = \varrho$ setzen. Dabei ist $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Diese Gröfsen sind die Koefficienten in der Hesseschen Normalform einer geraden Linie; sie sollen aus diesem Grunde die Hesseschen Koordinaten einer Geraden heifsen. Ihre geometrische Bedeutung ist zwar bei weitem nicht so schön und einfach, wie derjenigen Bestimmungsgröfsen, welche wir in 2. aufgestellt haben. Dieser Mangel wird aber reichlich aufgewogen durch den Umstand, dafs es die einzigen Linienkoordinaten sind, welche in dem oben angegebenen Sinne den Cartesischen rechtwinkligen Koordinaten zugeordnet sind.

Übungen:

1) Man stelle die Gleichung eines Kreises in Schweringschen Koordinaten dar, wenn die Punkte O_1 und O_2 Endpunkte eines Durchmessers und die Axen O_1X und O_2Y Tangenten sind.

2) Wie transformiert man die Hesseschen Koordinaten
   a) bei Parallelverschiebung der Axen,
   b) bei Drehung um den Anfangspunkt,
   c) bei gleichzeitiger Veränderung des Anfangspunktes und der Richtung der Axen?

3) Was bedeutet der Ausdruck

$$ux + vy + w,$$

wenn x, y die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, u, v, w die Hesseschen Koordinaten einer Geraden sind, beide bezogen auf dieselben Axen?

4) Die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkte (a, b) und dem Radius r kann in der Form geschrieben werden:

$$au + bv + w = \pm r.$$

Man leite aus dieser Gleichung Eigenschaften des Kreises her. (Zum Vergleiche beachte man § 29.)

5) Man leite aus der Gleichung der Ellipse in Hesseschen Koordinaten

$$a^2u^2 + b^2v^2 = w^2$$

folgende Sätze her:

a) Das Produkt der von den Brennpunkten auf eine Tangente gefällten Senkrechten ist gleich b^2.

b) Die Fufspunkte der von den Brennpunkten auf die Tangenten gefällten Senkrechten liegen auf einem Kreise, der um den Mittelpunkt der Ellipse mit dem Radius a beschrieben wird.

c) Die Tangenten dieser Kurve sind die Mittelsenkrechten zu einem Brennpunkte und den Punkten des um den andern Brennpunkt mit dem Radius 2a beschriebenen Kreises.

6) Wie ändern sich diese Sätze für die Hyperbel:

$$a^2u^2 - b^2v^2 = w^2?$$

7) Entsprechende Sätze leite man für die Parabel aus der Gleichung her:

$$2uw + pv^2 = 0.$$

Anhang.

Die Methode der analytischen Geometrie kommt darauf hinaus, die vorausgesetzten Eigenschaften einer Figur durch Formeln zwischen Koordinaten darzustellen, mit diesen Formeln Umgestaltungen vorzunehmen und so neue Formeln herzuleiten, welche den analytischen Ausdruck für weitere Eigenschaften der Figur bilden. Wenn sich die vorausgesetzten Eigenschaften durch unsere allgemeinen homogenen Koordinaten darstellen lassen, so stellt sich neben dasjenige Formelsystem, durch welches die vorausgesetzten Eigenschaften ausgedrückt werden, ein zweites System, welches aus dem gegebenen durch Vertauschung der Punkt- und der Linienkoordinaten erhalten wird. Die Rechnung mit beiden Arten von Koordinaten kann aber ganz gleichmäfsig durchgeführt

werden; man darf daher auch in dem Schlufsresultat Punkt- und Linienkoordinaten vertauschen. Wenn z. B. sowohl in den aufgestellten wie in den hergeleiteten Formeln nur Punktkoordinaten vorkommen, so kann man zunächst in den vorausgesetzten Gleichungen die Koordinaten (x) durch die Koordinaten (u) ersetzen, mit diesen genau dieselben Umgestaltungen vornehmen und die daraus hergeleiteten Gleichungen zwischen Linienkoordinaten geometrisch deuten. In der zuerst durchgeführten Untersuchung schliefst man aus einer vorausgesetzten Beziehung zwischen Punkten auf weitere Eigenschaften desselben Systems von Punkten. Bei der Benutzung von Linienkoordinaten setzt man für ein System von Linien gewisse Eigenschaften voraus und folgert daraus neue Eigenschaften für dasselbe System.

Beim vollständigen Vierseit stellt sich die Verbindungslinie eines Eckpunktes mit dem Schnittpunkte der beiden nicht zugehörigen Diagonalen in einer Form dar, aus der sich eine merkwürdige Lage dieser Linie zu andern Geraden des Vierseits ergiebt. Indem wir hier überall die Punkt- durch Linienkoordinaten ersetzen, erhalten wir den Satz über das vollständige Viereck.

Auch wenn in einer mathematischen Entwicklung gleichzeitig Punkt- und Linienkoordinaten benutzt werden, kann man überall diese beiden Arten mit einander vertauschen; wenn dann nicht bereits in den ursprünglichen Formeln die Punkt- und Linienkoordinaten gleichmäfsig vorkommen, so führt die Vertauschung einen neuen Satz herbei. Unter der gemachten Voraussetzung kann man jedem Satze aus der Geometrie der Ebene einen zweiten Satz an die Seite stellen, der aus dem ersten durch Vertauschung von Punkt und Gerade erhalten wird; man nennt dies Princip das der Dualität.

Die angegebene Methode läfst sich nicht anwenden, sofern in der Untersuchung ein Unterschied zwischen eigentlichen und uneigentlichen Gebilden gemacht wird. Das geht schon aus dem Grunde nicht, weil es in der Ebene unendlich viele uneigentliche Punkte, aber nur eine einzige uneigentliche Gerade giebt. Dementsprechend unterscheidet man in der Geometrie der Ebene zweierlei Arten von Untersuchungen:

a) solche, bei denen die Punkte der unendlichfernen Geraden von den übrigen Punkten nicht unterschieden werden,

b) solche, bei denen die eigentlichen und uneigentlichen Gebilde von einander getrennt werden.

Für Untersuchungen der ersten Art können wir unsere Entwicklung einzig auf die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ und $u_1 : u_2 : u_3$ stützen, indem wir ein ganz beliebiges Koordinatendreieck benutzen. Alle Sätze, welche wir hierbei erhalten, weisen wir der projektiven Geometrie oder der Geometrie der Lage zu. Jedem Lehrsatze, der diesem Bereiche angehört, können wir einen zweiten zuordnen, der sich von jenem dadurch unterscheidet, dafs überall Punkte und gerade Linien mit einander vertauscht werden. Mit andern Worten: Auf dem Gebiete der projektiven Geometrie gilt das Princip der Dualität ausnahmslos.

Bei den Untersuchungen der zweiten Art unterscheiden wir zunächst die eigentlichen von den uneigentlichen Gebilden; wir ziehen aber auch solche Eigenschaften der eigentlichen Gebilde in Betracht, welche auf uneigentliche Gebilde nicht übertragen werden können. Dahin gehören u. a. der Abstand zweier Punkte und der Winkel zweier geraden Linien. Alle Sätze, bei denen das geschieht, weisen wir der Geometrie des Mafses oder der metrischen Geometrie zu. Auch auf diesem Gebiete spielt die Dualität eine wichtige Rolle, aber sie liefert uns kein Princip mehr, durch das jeder Satz unmittelbar übertragen werden kann.

§ 12.

Die Kurven zweiter Ordnung.

1. Nachdem wir erkannt haben, dafs jede Gleichung, welche in Punktkoordinaten homogen vom ersten Grade ist, eine gerade Linie darstellt, gehen wir jetzt dazu über, diejenigen Linien zu untersuchen, welche durch eine homogene Gleichung zweiten Grades in den Koordinaten x_1, x_2, x_3 dargestellt werden. Die allgemeinste Gleichung dieser Art ist:

$$(1) \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Indem wir festsetzen, dafs

$$a_{23} = a_{32},\ a_{13} = a_{31},\ a_{12} = a_{21}$$

sein soll, können wir diese Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$x_1 (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2 (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\ + x_3 (a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) = 0,$$

oder auch:

$$x_1 \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa + x_2 \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa + x_3 \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa = 0,$$
$$(\varkappa = 1,\ 2,\ 3)$$

wofür wir endlich kurz schreiben können:

$$(2) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0.$$
$$(\iota, \varkappa = 1, 2, 3)$$

Wir nennen jede durch eine solche Gleichung dargestellte Linie eine Kurve zweiter Ordnung.

2. Ändern wir das Koordinatensystem um, ersetzen wir also das zu Grunde gelegte Koordinatendreieck durch ein anderes Dreieck und geben wir dem Einheitspunkte irgend eine andere Lage, so kommt dies darauf hinaus, die Koordinaten x_1, x_2, x_3 durch homogene lineare Funktionen von drei neuen Gröfsen y_1, y_2, y_3 zu ersetzen; wir haben demnach die Transformations-Gleichungen:

$$x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3$$
$$x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3$$
$$x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3.$$

Dadurch geht x_1^2 über in $(c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3)^2$ und das Produkt x_2x_3 über in

$$(c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3)(c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3);$$

die Gleichung (1) verwandelt sich also in eine Gleichung zwischen y_1, y_2, y_3, welche ebenfalls homogen vom zweiten Grade ist. Somit wird eine Kurve zweiter Ordnung für jedes System homogener Punktkoordinaten durch eine homogene Gleichung zweiten Grades dargestellt.

3. Wie wir in § 11, 3 gesehen haben, können wir zwei Eckpunkte des Koordinatendreiecks ins Unendlichferne legen und dadurch zu den Cartesischen Koordinaten gelangen. Hierbei bleibt, wie wir soeben gesehen haben, der Grad der Gleichung ungeändert. Daher ist auch die Gleichung der Kurve in Cartesischen, speciell in rechtwinkligen Koordinaten vom zweiten Grade. Die bekannten Gleichungen der Kegelschnitte (Ellipse, Parabel, Hyperbel) sind aber quadratisch; somit gehören die Kegelschnitte zu den Kurven zweiter Ordnung. Der Kürze wegen nennen wir vielfach alle Kurven zweiter Ordnung auch Kegelschnitte.

4. Soll die durch die Gleichung (1) dargestellte Kurve durch den Punkt (x′) gehen, so mufs die Gleichung erfüllt sein:

$$(3)\quad a_{11}x_1'x_1' + a_{22}x_2'x_2' + a_{33}x_3'x_3' + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' = 0;$$

die aufgestellte Forderung führt also auf eine lineare Gleichung zwischen den sechs Koefficienten der Gleichung (1). Für die Kurve kommt es aber nur auf das Verhältnis dieser Koefficienten an. Da man diese finden kann, wenn man fünf Gleichungen von der Form (3) kennt, so ist eine Kurve zweiter Ordnung im allgemeinen durch fünf Punkte bestimmt.

5. Um dies genauer zu übersehen, stelle man die Bedingungen dafür auf, dafs eine Kurve zweiter Ordnung durch die fünf Punkte (x^1), (x^2), (x^3), (x^4), (x^5) hindurchgeht. (Hier sind die obern Ziffern keine Exponenten, sondern blofse Marken.) Der Gleichung (3) entsprechend müssen jetzt die Bedingungen erfüllt sein:

$$(4)\quad \begin{array}{l} a_{11}x_1^1x_1^1 + a_{22}x_2^1x_2^1 + a_{33}x_3^1x_3^1 + 2a_{12}x_1^1x_2^1 + 2a_{13}x_1^1x_3^1 + 2a_{23}x_2^1x_3^1 = 0 \\ a_{11}x_1^2x_1^2 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + 2a_{23}x_2^2x_3^2 = 0 \\ a_{11}x_1^3x_1^3 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + 2a_{23}x_2^3x_3^3 = 0 \\ a_{11}x_1^4x_1^4 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + 2a_{23}x_2^4x_3^4 = 0 \\ a_{11}x_1^5x_1^5 + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + 2a_{23}x_2^5x_3^5 = 0. \end{array}$$

Aus diesen fünf Gleichungen lassen sich die Verhältnisse der sechs Gröfsen a_{11}, a_{22}, a_{33}, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{23}$ berechnen. Ich kann die Koefficienten, mit denen diese Gröfsen in den Gleichungen (4) multipliziert werden, zu der Matrix zusammenstellen:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} x_1^1x_1^1 & x_2^1x_2^1 & x_3^1x_3^1 & x_1^1x_2^1 & x_1^1x_3^1 & x_2^1x_3^1 \\ x_1^2x_1^2 & . & . & . & . & x_2^2x_3^2 \\ x_1^3x_1^3 & . & . & . & . & x_2^3x_3^3 \\ x_1^4x_1^4 & . & . & . & . & x_2^4x_3^4 \\ x_1^5x_1^5 & . & . & . & . & x_2^5x_3^5 \end{array} \right\|$$

Aus dieser Matrix kann ich jedesmal eine Vertikalreihe weglassen und die übrigen zu einer Determinante vereinigen. Dadurch gelange ich zu den Determinanten $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$, wo in der Determinante $\triangle_1$ die erste, in $\triangle_2$ die zweite Vertikalreihe fehlt u. s. w. Wie die Determinantentheorie lehrt, verhalten sich die Koefficienten der Gleichung (1) wie diese Determinanten mit abwechselnden Zeichen; oder es ist:

$$a_{11} : a_{22} \,.\, a_{33} : 2a_{12} : 2a_{13} : 2a_{23} =$$
$$\triangle_1 : -\triangle_2 : +\triangle_3 : -\triangle_4 : +\triangle_5 : -\triangle_6.$$

6. Man kann auch die Gleichung (1) mit den fünf Gleichungen (4) zusammenstellen. Dadurch erhalten wir zwischen den sechs Gröfsen $a_{11} \dots 2a_{23}$ sechs homogene lineare Gleichungen. Diese sind nur mit einander vereinbar, wenn die aus ihren Koefficienten gebildete Determinante verschwindet. Daher kann die Gleichung derjenigen Kurve zweiter Ordnung, welche durch die fünf Punkte hindurchgeht, in folgender Form dargestellt werden:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1x_1 & x_2x_2 & x_3x_3 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ x_1^1x_1^1 & . & . & . & . & x_2^1x_3^1 \\ x_1^2x_1^2 & . & . & . & . & x_2^2x_3^2 \\ x_1^3x_1^3 & . & . & . & . & x_2^3x_3^3 \\ x_1^4x_1^4 & . & . & . & . & x_2^4x_3^4 \\ x_1^5x_1^5 & . & . & . & . & x_2^5x_2^5 \end{vmatrix}$$

7. Mag man die in 5. angegebene Methode verfolgen oder die zuletzt aufgestellte Gleichung zu Grunde legen, beidemal setzt man voraus, dafs die sechs Determinanten $\triangle_1, \triangle_2, \dots \triangle_6$ nicht sämtlich verschwinden. Wenn dieser Ausnahmefall eintritt, so kommen die Gleichungen (4) auf vier Gleichungen hinaus; durch die fünf Punkte gehen in diesem Falle unendlichviele Kurven zweiter Ordnung. Dann müssen aber auch, wie man leicht sieht, die fünf Punkte eine ganz besondere Lage zu einander haben; demnach gilt der Satz:

Durch fünf Punkte läfst sich im allgemeinen eine einzige Kurve zweiter Ordnung legen.

Wir sagen auch, eine Kurve zweiter Ordnung sei durch fünf Punkte bestimmt.

8. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden $x_3 = 0$ werden gefunden, indem man in der Gleichung (1) $x_3 = 0$ setzt. Dann erhalten wir zur Bestimmung des Verhältnisses $x_1 : x_2$ die Gleichung:

$$(5) \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

Hier sind verschiedene Fälle zu unterscheiden. Erstens können die drei Koefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22} gleich null sein. Alsdann wird die Gleichung (1) dadurch befriedigt, dafs man in ihr $x_3 = 0$ setzt; jeder Punkt der Geraden $x_3 = 0$ gehört also der Kurve an. Zweitens kann die Gleichung (5) zwei verschiedene reelle Wurzeln

für den Quotienten $x_1 : x_2$ (oder auch für $x_2 : x_1$) liefern; in diesem Falle hat die Gerade zwei Punkte mit der Kurve gemein. Die Gleichung (5) kann aber drittens auch zwei gleiche Wurzeln für den Quotienten $x_2 : x_1$ ergeben; wir sagen in diesem Falle, die gemeinschaftlichen Punkte fielen zusammen und die Kurve werde von der Geraden berührt. Endlich kann die Gleichung (5) zwei imaginäre Wurzeln haben; alsdann kann kein Punkt der Geraden $x_3 = 0$ der Kurve angehören. Wir führen jedoch jetzt folgende Bezeichnung ein: Wenn die Koordinaten x_1, x_2, x_3 komplexe Verhältnisse zu einander haben, so wollen wir sagen, sie stellten einen imaginären Punkt dar. Demnach sagen wir in dem Falle, dafs die Gleichung (5) zwei komplexe Wurzeln hat, die Gerade $x_3 = 0$ schneide die Kurve (1) in zwei imaginären Punkten.

9. Wie wir oben gesehen haben, bleibt die Gleichung (1) vom zweiten Grade, wenn wir beliebige andere Dreieckskoordinaten einführen. Für ein anderes Koordinatensystem nimmt daher die Gleichung (1) die Form an: $\Sigma b_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa = 0$. Setzt man hierin $y_3 = 0$, so bleibt die quadratische Gleichung:

$$b_{11}y_1^2 + 2b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 = 0.$$

Daher hat auch die Gerade $y_3 = 0$, falls sie nicht etwa ganz der Kurve angehört, mit ihr zwei reelle oder imaginäre Punkte gemeinschaftlich. Die Gerade $y_3 = 0$ kann aber willkürlich gewählt werden; es gilt somit der Satz:

Jede Gerade hat mit einer Kurve zweiter Ordnung, falls sie ihr nicht ganz angehört, zwei reelle oder imaginäre oder zusammenfallende Punkte gemeinschaftlich.

10. Diesen Satz kann man auch auf folgendem Wege beweisen. Es seien (x') und (x'') zwei beliebige Punkte der Ebene; einen beliebigen Punkt ihrer Verbindungsgeraden kann man durch die Verhältnisse

$$(6) \quad x_1' + \omega x_1'', \; x_2' + \omega x_2'', \; x_3' + \omega x_3''$$

darstellen. Um die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve (1) zu finden, hat man für x_1, x_2, x_3 die Werte (6) einzusetzen. Nun ist

$$a_{11}(x_1' + \omega x_1'')^2 = a_{11}\omega^2 x_1''^2 + 2a_{11}\omega x_1'' x_1' + a_{11}x_1'^2$$

. . . .

$$a_{23}(x_2' + \omega x_2'')(x_3' + \omega x_3'') = a_{23}\omega^2 x_2'' x_3'' + a_{23}\omega(x_2' x_3'' + x_2'' x_3') + a_{23}x_2' x_3'.$$

Demnach geht die Gleichung (1) durch die angegebene Einsetzung über in:

$$
(7)\quad \begin{aligned}
&\omega^2 \{a_{11}x_1''^2 + a_{22}x_2''^2 + a_{33}x_3''^2 + 2a_{12}x_1''x_2'' + 2a_{13}x_1''x_3'' \\
&\qquad\qquad + 2a_{23}x_2''x_3''\} \\
&+ 2\omega\{a_{11}x_1'x_1'' + a_{22}x_2'x_2'' + a_{33}x_3'x_3'' + a_{12}(x_1'x_2'' + x_2'x_1'') \\
&\qquad + a_{13}(x_1'x_3'' + x_3'x_1'') + a_{23}(x_2'x_3'' + x_3'x_2'')\} \\
&+ \{a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' \\
&\qquad\qquad + 2a_{23}x_2'x_3'\} = 0.
\end{aligned}
$$

Nachdem die Kurve und die beiden Punkte gegeben sind, ist ω die einzige Unbekannte in dieser Gleichung; in dieser Unbekannten ist die Gleichung vom zweiten Grade; sie führt also auf zwei Schnittpunkte.

11. Man sagt, eine ebene Kurve sei von der n^{ten} Ordnung, wenn die Auffindung ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen geraden Linie auf eine Gleichung n^{ten} Grades führt, oder mit andern Worten, wenn sie mit einer geraden Linie im allgemeinen n reelle oder imaginäre Punkte gemeinschaftlich hat. Indem wir diese Definition zu Grunde legen, können wir leicht den Satz beweisen: Wenn eine ebene Kurve sich in Dreieckskoordinaten durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades darstellt, so ist sie von der n^{ten} Ordnung. Es sei $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ eine homogene Funktion n^{ten} Grades in x_1, x_2, x_3; um den Schnitt der Geraden $x_3 = 0$ mit der Kurve $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$ zu finden, hat man in der letzten Gleichung $x_3 = 0$ zu setzen. Dadurch erhält man für den Quotienten $x_1 : x_2$ eine Gleichung n^{ten} Grades; die Gerade $x_3 = 0$ hat also mit der Kurve n Schnittpunkte. Bei einer beliebigen Umwandlung des Koordinatensystems behält die Gleichung der Kurve ihren Grad bei; daher hat jede Gerade mit der Kurve n Punkte gemeinschaftlich.

Übungen.

1) Man bestimme die Schnittpunkte der Seiten des Koordinatendreiecks mit den Kurven:

a) $3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 8x_1x_3 + 4x_3^2 = 0$
b) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 7x_2^2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + x_3^2 = 0$
c) $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_3 - 10x_2x_3 + 9x_3^2 = 0$
d) $2x_1^2 - 5x_1x_2 - 3x_2^2 + 9x_1x_3 - 13x_2x_3 + 10x_3^2 = 0.$

2) Man suche die Schnittpunkte der Kurve $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ mit folgenden Geraden:

a) mit den Seiten des Koordinatendreiecks,
b) mit der Einheitsgeraden,
c) mit der Geraden $x_1 + x_2 - x_3 = 0$,
d) mit der Geraden $x_1 - x_2 + x_3 = 0$,
e) mit der Geraden $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$,
f) mit der Geraden $x_2 - x_3 = 0$,
g) mit der Geraden $x_1 - x_3 = 0$,
h) mit der Geraden $x_1 - x_2 = 0$.

3) Man suche die Punkte, welche die Kurve

$$x_1^2 - 2x_2x_3 = 0$$

mit den unter 2) angegebenen Geraden gemeinschaftlich hat.

4) Wenn eine Kurve zweiter Ordnung durch den Punkt (1, 0, 0) geht, so mufs der Koefficient von x_1^2 verschwinden.

Ebenso wird in der Gleichung (1) $a_{22} = 0$, wenn die Kurve durch den Eckpunkt O_2 des Koordinatendreiecks geht, und es wird $a_{33} = 0$, wenn die Kurve (1) durch den Punkt O_3 geht.

5) Die Kurve (1) geht durch den Einheitspunkt hindurch, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} + 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23} = 0.$$

6) Man lege eine Kurve zweiter Ordnung durch die fünf Punkte:

a) (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 2, 3);
b) (1, 1, 1), (− 1, 1, 1), (1, − 1, 1), (1, 1, − 1), (3, 2, 1);
c) (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (−1, 1, 1);
d) (0, 1, 1), (0, 1, − 1), (1, 0, 1), (1, 0, −1), $(1, 1, \sqrt{2})$;
e) (0, 0, 1), (0, 1, 0), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (−2, 1, 2);
f) (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (−1, 1, 1).

7) Die obigen Determinanten $\triangle_1, \triangle_2, \triangle_3, \triangle_4, \triangle_5, \triangle_6$ können für fünf verschiedene Punkte nur dann sämtlich gleich null werden, wenn unter je vier von ihnen sich mindestens drei befinden, die in gerader Linie liegen.

(Anleitung zum Beweise: Angenommen, von den vier Punkten 1, 2, 3, 4 lägen keine drei in gerader Linie; man wähle drei zu Eckpunkten des Koordinatendreiecks, den vierten zum Einheitspunkte. Sind x_1, x_2, x_3 die Koordinaten des fünften Punktes,

so mufs sein: $x_2x_3 = x_3x_1 = x_1x_2$, was nur möglich ist, wenn der letzte Punkt mit einem der ersten identisch wird.)

8) Man beweise aus 7), dafs unter der angegebenen Bedingung mindestens vier Punkte in einer geraden Linie liegen müssen.

§ 13.

Pol und Polare der Kurven zweiter Ordnung.

1. Um zu einer grofsen Reihe von Eigenschaften einer Kurve zweiter Ordnung:

$$(1) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$

zu gelangen, unterziehen wir die Gleichung (7) des vorigen Paragraphen einer genaueren Untersuchung. Diese Gleichung schreiben wir in der Form:

$$(2) \quad A\omega^2 + 2B\omega + C = 0,$$

indem wir setzen:

$$A = \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'', \quad C = \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa',$$

$$(3) \quad \begin{aligned} B = {} & a_{11}x_1'x_1'' + a_{22}x_2'x_2'' + a_{33}x_3'x_3'' \\ & + a_{12}(x_1'x_2'' + x_2'x_1'') + a_{13}(x_1'x_3'' + x_3'x_1'') \\ & + a_{23}(x_2'x_3'' + x_3'x_2''). \end{aligned}$$

Den Ausdruck für B können wir auch in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} B = {} & a_{11}x_1'x_1'' + a_{22}x_2'x_2'' + a_{33}x_3'x_3'' + a_{12}x_1'x_2'' \\ & + a_{21}x_2'x_1'' + a_{13}x_1'x_3'' + a_{31}x_3'x_1'' + a_{23}x_2'x_3'' \\ & + a_{32}x_3'x_2'' \end{aligned}$$

oder

$$B = \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa''$$

oder auch, weil $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$ ist,

$$B = \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'.$$

2. Sind ω_1 und ω_2 die Wurzeln der Gleichung (2), so stellt der Bruch $\omega_1 : \omega_2$ das Doppelverhältnis dar, nach welchem die von den Punkten (x′) und (x″) begrenzte Strecke in ihren Schnittpunkten mit der Kurve geteilt wird. Für den Wert -1 wird das Doppelverhältnis zu einem harmonischen. Dann mufs

$$\omega_1 : \omega_2 = -1 \text{ oder } \omega_1 = -\omega_2 \text{ oder } \omega_1 + \omega_2 = 0$$

sein. Bekanntlich ist aber

$$\omega_1 + \omega_2 = -\frac{2B}{A}.$$



Die Summe der Wurzeln verschwindet also nur, wenn $B = 0$ ist. In diesem Falle liegen aber die gegebenen Punkte (x') und (x'') harmonisch zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit der Kurve. Nun stellen wir folgende Definition auf:

Zwei Punkte sind konjugierte Pole in Bezug auf eine Kurve zweiter Ordnung, wenn sie harmonisch liegen zu den beiden Punkten, in denen ihre Verbindungsgerade die Kurve schneidet.

Die Bedingung dafür, dafs die Punkte (x') und (x'') konjugierte Pole zu der Kurve (1) sind, wird durch die Gleichung $B = 0$ dargestellt; es ist dies die Gleichung:

$$(4) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0,$$

welche man auch in der Form schreiben kann:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa' = 0.$$

3. Aus dieser Definition geht hervor, dafs jedesmal, wenn der Punkt (x'') konjugierter Pol zum Punkte (x') ist, auch der Punkt (x') für dieselbe Kurve konjugierter Pol zum Punkte (x'') ist. Man ersieht dies auch aus der zweiten Form, in der man die Gleichung (4) schreiben kann.

5. Damit der Punkt (x'') konjugierter Pol zum Punkte (x') ist, braucht nur die Gleichung (4) erfüllt zu sein. Es giebt also unendlichviele Punkte, welche zu einem gegebenen Punkte (x') konjugierte Pole sind. Alle diese Punkte (x) genügen der Gleichung

$$(5) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa = 0,$$

welche aus (4) hervorgeht, indem man an x_1'', x_2'', x_3'' die obern Marken wegläfst. Diese Gleichung kann man auch in folgender Weise schreiben:

$$(6) \quad x_1 (a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3') + x_2(a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3') \\ + x_3 (a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3') = 0.$$

Hierin sind die Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ und die Koordinaten x_1', x_2', x_3' bekannt. Daher stellt die Gleichung eine gerade Linie dar, wofern nicht die drei Gröfsen verschwinden, mit denen die Variabeln x_1, x_2, x_3 multipliziert sind. Die drei Gleichungen

$$a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' = 0$$
$$a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' = 0$$
$$a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' = 0$$

können aber nur dann für einen Punkt (x') befriedigt werden,

wenn die Determinante aus den Koefficienten verschwindet, wenn also die Gleichung besteht:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Die auf der linken Seite stehende Determinante nennen wir die Determinante aus den Koefficienten der Gleichung der Kurve. Wir wollen zuvörderst annehmen, dafs diese Determinante von null verschieden ist. In diesem Falle stellt die Gleichung (6) für jede Wahl von (x′) eine gerade Linie dar, und diese enthält alle zum Punkte (x′) konjugierten Pole. Diese Gerade nennen wir die Polare des Punktes (x′). Demnach können wir den Satz aussprechen:

Wenn die Determinante einer Kurve zweiter Ordnung nicht verschwindet, so liegen alle Punkte, welche in Bezug auf die Kurve konjugierte Pole zu einem gegebenen Punkte sind, auf einer geraden Linie, der Polare des Punktes.

Wir können auch sagen:

Wenn die Determinante der Kurve von null verschieden ist, so gehört zu jedem Punkte eine einzige Polare.

6. Umgekehrt können wir aber auch jede Gerade der Ebene als Polare auffassen und zu ihr den Pol eindeutig bestimmen. Soll die Gerade

$$(8)\quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$$

die Polare des Punktes (x′) sein, so dürfen sich die Koefficienten von x_1, x_2, x_3 in den Gleichungen (6) und (8) nur durch einen konstanten Faktor ω unterscheiden; es müssen also die Bedingungen erfüllt sein:

$$(9)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' &= \omega c_1 \\ a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' &= \omega c_2 \\ a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' &= \omega c_3. \end{aligned}$$

Nach unserer Annahme ist die aus den Koefficienten von x_1', x_2', x_3' gebildete Determinante von null verschieden; daher können wir aus diesen Gleichungen x_1', x_2', x_3' berechnen, nachdem c_1, c_2, c_3 und ω gegeben sind. Durch eine andere Wahl von ω ändert sich aber das Verhältnis von $x_1' : x_2' : x_3'$ nicht;

wir erhalten also denselben Punkt (x'), wie auch der Faktor ω gewählt werden mag. Somit folgt der Satz:

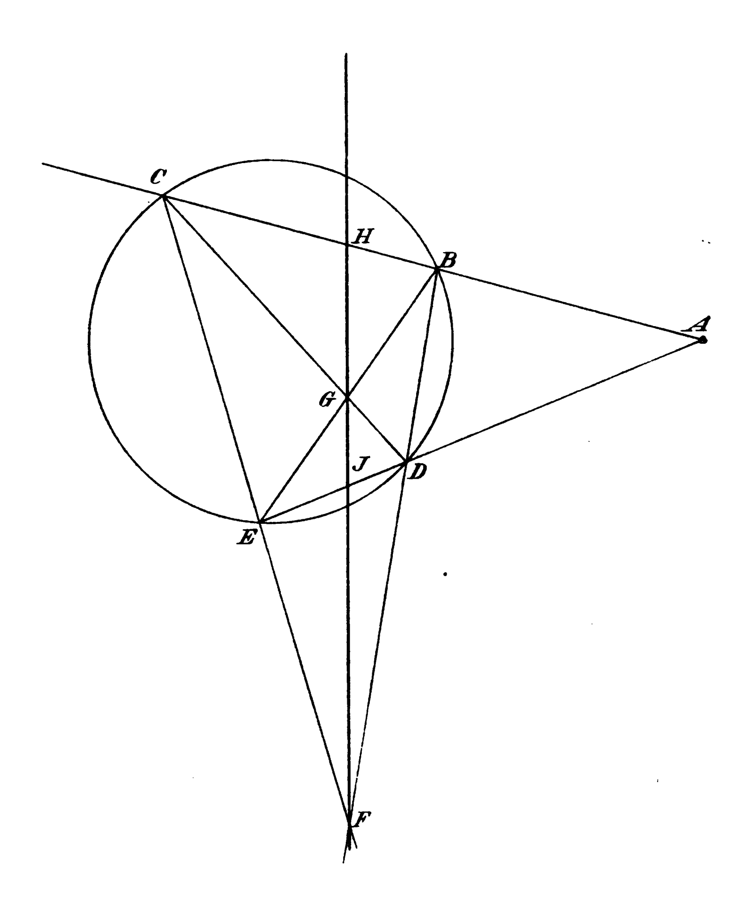
Wenn die Determinante einer Kurve zweiter Ordnung nicht verschwindet, so ist jede Gerade der Ebene in Bezug auf die Kurve die Polare zu einem Punkte.

In diesem Falle hat jeder Punkt der Ebene eine bestimmte Polare und jede Gerade der Ebene einen bestimmten Pol.

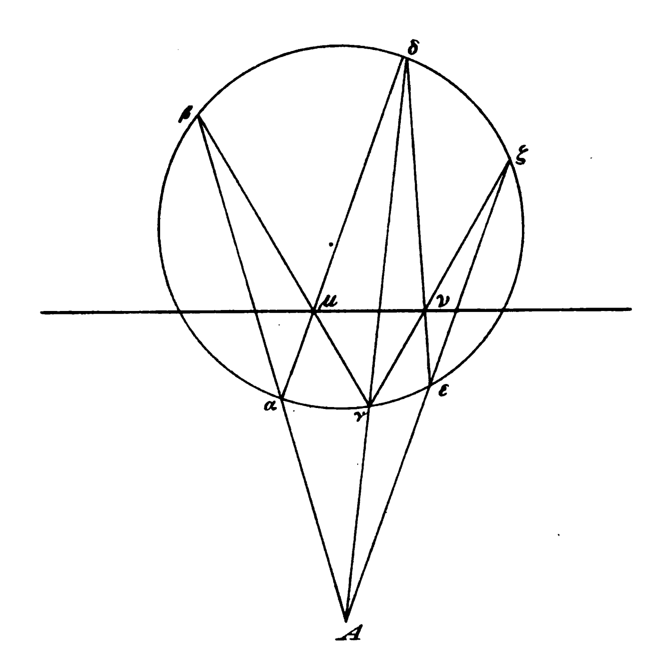
7. Diejenigen Kurven, deren Determinante nicht verschwindet, unterscheiden sich, wie wir später sehen werden, wesentlich von denjenigen Linien zweiter Ordnung, für welche die aus den Koefficienten ihrer Gleichung gebildete Determinante gleich null ist. Wir nennen daher diejenigen Kurven, für welche die Determinante von null verschieden ist, eigentliche Kurven zweiter Ordnung und bezeichnen als uneigentliche Kurven zweiter Ordnung solche Linien, welche durch eine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen den Punktkoordinaten mit verschwindender Determinante dargestellt werden. In Bezug auf eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung gehört zu jedem Punkte der Ebene eine bestimmte Polare und zu jeder Geraden der Ebene ein bestimmter Pol.

8. Die Polare eines Punktes in Bezug auf eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung ist bekannt, sobald man zwei Punkte dieser Geraden, also zwei konjugierte Pole kennt. Diese Bemerkung ermöglicht es, nachdem die Kurve gegeben ist, zu einem beliebig gewählten Punkte die Polare vermittelst einer linearen Konstruktion zu finden. Um zu dem Punkte A die Polare zu finden, lege man durch ihn zwei beliebige Gerade, von denen die Kurve geschnitten wird (s. umstehende Figur). Die erste Gerade schneide in den Punkten B und C, die zweite in den Punkten D und E. Wenn sich jetzt die Geraden BD und CE in F, die Geraden BE und CD in G schneiden, so ist die Gerade FG die Polare des Punktes A. Ist nämlich H der Schnittpunkt von FG mit BC und J der Schnittpunkt von FG mit DE, so liegt H harmonisch zu A in Bezug auf BC und J harmonisch zu A in Bezug auf DE. Die Punkte H und J sind also konjugierte Pole des Punktes A; sie liegen somit auf seiner Polaren; und da der Punkt A nur eine einzige Polare hat, mufs diese mit der

Verbindungslinie von H und J, also auch mit der Geraden FG zusammenfallen.



Zuweilen ist es bequemer, folgende Konstruktion zu machen: Man ziehe (s. folgende Figur) durch den Punkt A drei gerade Linien, von denen die Kurve geschnitten wird; die Schnittpunkte mit der ersten Geraden seien $\alpha\beta$, mit der zweiten $\gamma\delta$, mit der dritten $\varepsilon\zeta$; die Geraden $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ mögen einander in μ, die Geraden $\gamma\zeta$ und $\delta\varepsilon$ in ν schneiden. Dann ist die Gerade $\mu\nu$ die Polare des Punktes A. Wie wir nämlich vorhin gesehen haben, mufs sowohl der Punkt μ wie der Punkt ν der Polaren angehören.



Diese Konstruktion versagt, wenn der Punkt A auf der Kurve liegt; indessen werden wir auf diesen Fall im nächsten Paragraphen genauer eingehen.

9. Wenn die Gerade p die Polare des Punktes π ist, so ist π konjugierter Pol zu jedem in p liegenden Punkte. Wie man daher einen Punkt 1 auf p annehmen mag, stets geht die Polare I von 1 durch den Punkt π hindurch; bewegt sich der Punkt 1 auf der Geraden p, so dreht sich die Polare I um den Punkt π. Wenn umgekehrt die Gerade I um den festen Punkt π gedreht wird, so ist auch der Pol 1 von I konjugierter Pol zu π; er liegt also auf der Polare p des Punktes π. Für eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung gilt also der Satz:

Bewegt sich ein Punkt in einer geraden Linie, so dreht sich seine Polare um einen festen Punkt, den Pol der Geraden; wenn sich umgekehrt eine gerade Linie um einen festen Punkt dreht, so bewegt sich ihr Pol auf einer geraden Linie, der Polare des Punktes.

10. Diesen Satz können wir auch leicht analytisch beweisen. Die Polare des Punktes (x') hat die Gleichung:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa' = 0,$$

und ebenso ist die Polare des Punktes (x''):

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa'' = 0.$$

Die Koordinaten eines Punktes, welcher der Verbindungslinie der Punkte (x') und (x'') angehört, sind den Gröfsen

$$(10) \quad x_1' + \varrho x_1'', \; x_2' + \varrho x_2'', \; x_3' + \varrho x_3''$$

proportional, und die Polare dieses Punktes hat die Gleichung:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota (x_\varkappa' + \varrho x_\varkappa'') = 0.$$

Diese Gleichung kann man aber auch in der Form schreiben:

$$(11) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa' + \varrho \, \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa'' = 0.$$

Aus dieser Form geht hervor, dafs die Polare zu einem Punkte (10) durch den Schnittpunkt der Polaren zu den Punkten (x') und (x'') hindurchgeht.

11. Geben wir ϱ alle möglichen Werte, so beschreibt der Punkt (10) eine gerade Linie oder, wie wir lieber sagen, eine gerade Punktreihe. Zugleich beschreibt die Polare (11) einen Strahlenbüschel. Zu irgend vier Punkten der Punktreihe (10) mögen die Werte ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 von ϱ gehören; alsdann hat das Doppelverhältnis dieser vier Punkte den Wert:

$$(12) \quad \frac{\varrho_1 - \varrho_3}{\varrho_3 - \varrho_2} : \frac{\varrho_1 - \varrho_4}{\varrho_4 - \varrho_2}.$$

Um die Polaren dieser vier Punkte darzustellen, hat man in (11) für ϱ der Reihe nach die Werte ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 einzusetzen; dann stellt auch der Ausdruck (12) das Doppelverhältnis dieser vier Strahlen des Büschels (11) dar.

Die Polaren zu irgend vier Punkten einer geraden Linie haben dasselbe Doppelverhältnis wie die vier Punkte.

Unter Anwendung der in § 5, 13 eingeführten Bezeichnung können wir diesem Satze auch folgenden Ausspruch geben:

Die Polaren zu den Punkten einer geraden Punktreihe bilden einen zu ihr projektiven Strahlenbüschel.

12. Wir beweisen folgenden Satz:

Eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung enthält keine gerade Linie in sich.

Wenn die aus den Koefficienten der Gleichung (1) gebildete Determinante von null verschieden ist, so ist es, wie wir zeigen wollen, nicht möglich, dafs die Gleichung (1) für die sämtlichen Punkte einer geraden Linie erfüllt wird.

Zum Beweise nehmen wir an, die Gleichung (1) werde für alle Punkte derjenigen Geraden befriedigt, welche durch die Punkte (x') und (x") geht. Dann mufs die Gleichung (2) für alle Werte von ω gültig sein; es müssen daher die Koefficienten A, B, C verschwinden, oder es mufs sein:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0,\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' = 0,\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \mu x_\iota'') (x_\varkappa' + \nu x_\varkappa'') = 0$$

für alle Werte von μ und ν. Irgend zwei Punkte der Geraden sind also konjugierte Pole von einander. Daher kann auch jeder Punkt der Geraden als ihr Pol betrachtet werden; die Gerade hat keinen bestimmten Pol, während wir in 6. gesehen haben, dafs in Bezug auf eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung jede Gerade einen einzigen Pol hat.

Übungen:

1) Welche Beziehung mufs zwischen den Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$ der Gl. (1) bestehen, damit die Punkte:

a) (1, 1, 1) und (1, 2, 3)
b) (1, 1, 0) und (0, 1, 1)
c) (1, 0, 0) und (0, 1, 0)

konjugierte Pole in Bezug auf die Kurve sind?

2) Man bestimme die Polaren der Eckpunkte des Koordinatendreiecks für die in Üb. 1) zu § 12 angegebenen Kurven.

3) Welches sind die Polaren zu den Eckpunkten des Koordinatendreiecks in Bezug auf die Kurven:

a) $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$,
b) $x_1^2 - 2x_2 x_3 = 0$?

4) Welche Koordinaten hat die Polare des Punktes (x') in Bezug auf die Kurve:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0?$$

Welches ist speciell die Polare des Einheitspunktes?

5) Welche Beziehungen müssen zwischen den Koefficienten der Gleichung (1) bestehen, damit

a) der Einheitspunkt die Einheitsgerade,

b) der Punkt (1, 0, 0) die Gerade (1, 0, 0),

c) der Punkt (x') die Gerade (l_1, l_2, l_3) zur Polare hat?

6) Welche Beziehung mufs zwischen den Koordinaten (l_1, l_2, l_3), (m_1, m_2, m_3), (n_1, n_2, n_3) dreier gerader Linien bestehen, damit diese Linien der Reihe nach die Polaren zu den Eckpunkten des Koordinatendreiecks in Bezug auf einen Kegelschnitt sind?

7) a) Wieviel Bedingungen für die Bestimmung eines Kegelschnitts vertritt die Forderung, dafs ein Punkt eine vorgeschriebene Polare haben soll?

b) Wieviel Punkte eines Kegelschnitts kann man noch willkürlich wählen, nachdem die Polare eines Punktes gegeben ist?

c) Wieviel Punkte eines Kegelschnitts kann man noch willkürlich wählen, nachdem zu zwei Punkten die Polaren bestimmt sind?

8) Jeder Diagonalpunkt eines in einen Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecks ist der Pol zu der Verbindungslinie der beiden andern Diagonalpunkte.

9) Die aus den Koefficienten der Gleichung (1) gebildete Determinante möge mit A und diejenige Unterdeterminante, welche in ihr mit $a_{\iota\varkappa}$ multipliziert wird, mit $A_{\iota\varkappa}$ bezeichnet werden; alsdann hat der Pol der Geraden (c_1, c_2, c_3) die Koordinaten:

$$c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + c_3 A_{31}, \quad c_1 A_{12} + c_2 A_{22} + c_3 A_{32},$$
$$c_1 A_{13} + c_2 A_{23} + c_3 A_{33}.$$

10) Ordnet man jedem Punkte einer geraden Punktreihe den Schnittpunkt seiner Polare mit einer (nicht durch den Pol gehenden) Geraden zu, so erhält man zwei projektive Punktreihen.

11) Ordnet man jedem Strahle eines Büschels die Verbindungslinie seines Pols mit einem festen Punkte zu, so erhält man zwei projektive Strahlenbüschel.

§ 14.

Die Tangenten an eine Kurve zweiter Ordnung.

1. Wenn der Punkt (x') auf der Kurve

$$(1) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$

liegt, so mufs die Gleichung erfüllt sein:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0.$$

Hat jetzt der Punkt (x″) eine solche Lage, daſs die Gleichung befriedigt wird:

$$(2) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0,$$

so geht die Gleichung (2) des vorigen Paragraphen über in

$$\omega^2 \, \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota'' x_\varkappa'' = 0,$$

welche, falls nicht etwa auch noch der Punkt (x″) auf der Kurve liegt, nur für $\omega = 0$ befriedigt werden kann. Die Gerade, deren Punkte durch die Verhältnisse $x_1' + \omega x_1'' : x_2' + \omega x_2'' : x_3' + \omega x_3''$ bestimmt werden, hat mit der Kurve nur den dem Werte $\omega = 0$ entsprechenden Punkt, also den Punkt (x′) gemeinschaftlich; sie ist eine Tangente der Kurve.

Wenn der Punkt (x′) auf der Kurve (1) liegt, so drückt die Gleichung (2) die Bedingung dafür aus, daſs der Punkt (x″) der Tangente im Punkte (x′) angehört.

2. Wenn wir den Punkt α fest auf der Kurve annehmen und ihn mit einem zweiten Punkte β der Kurve verbinden, so ist die Gerade $\alpha\beta$ eine Sekante der Kurve. Lassen wir den Punkt β sich bewegen und dabei dem Punkte α immer näher kommen, so nähert sich auch die Sekante immer mehr einer festen Grenzlage, nämlich derjenigen Geraden, von der die Kurve im Punkte α berührt wird. Auf der Sekante $\alpha\beta$ wählen wir einen dritten Punkt γ so, daſs er der Sehne $\alpha\beta$ nicht angehört; alsdann muſs der in der Geraden $\alpha\beta$ gelegene Pol von γ zwischen α und β liegen. Drehen wir jetzt die Sekante so um den Punkt α, daſs sie immer näher an die Tangente heranrückt, der Punkt β also immer mehr mit dem Punkte α zusammenfällt, so muſs auch, während γ seine Entfernung von α beibehält, der Punkt δ immer mehr an α heranrücken. Für die Tangente muſs der auf ihr enthaltene konjugierte Pol zu irgend einem ihrer Punkte mit dem Berührungspunkte zusammenfallen; nur zum Berührungspunkte ist jeder Punkt der Tangente konjugierter Pol. Wir erhalten also den Satz:

Der Berührungspunkt einer Tangente an eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung ist konjugierter Pol zu jedem in ihr gelegenen Punkte, und die Polare zu einem Punkte der Kurve ist diejenige Gerade, von der die Kurve in dem Punkte berührt wird.

3. Da die Tangente an einen Punkt der Kurve ihren Berührungspunkt enthält, geht die Polare zu einem Punkte der Kurve durch ihren Pol hindurch. Umgekehrt gehört jeder Punkt, der in seiner Polaren liegt, der Kurve an. Soll nämlich die Gleichung

$$x_1 \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa' + x_2 \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa' + x_3 \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa' = 0$$

erfüllt sein, wenn man den Punkt (x) durch (x') ersetzt, so mufs die Gleichung bestehen:

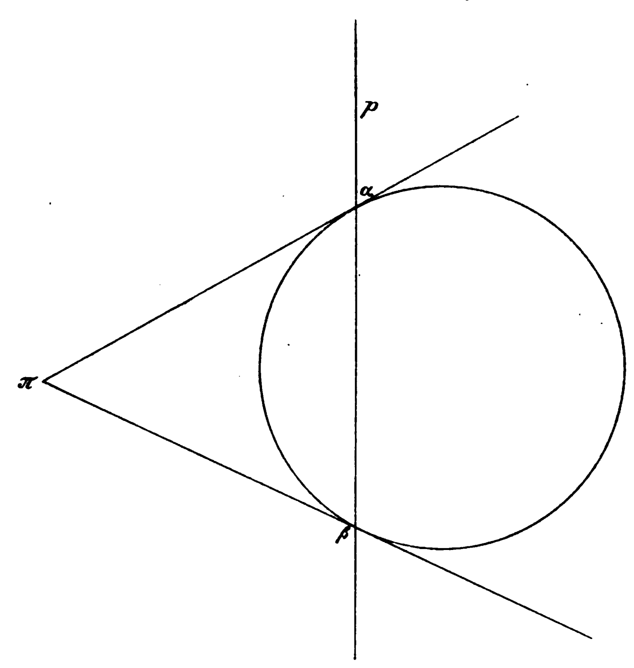
$$x_1' \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa' + x_2' \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa' + x_3' \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa' = 0;$$

diese kann auch in der Form geschrieben werden

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0,$$

und giebt die Bedingung dafür an, dafs der Punkt (x') auf der Kurve liegt.

4. Wenn die Polare p eines beliebigen Punktes π der Ebene die Kurve in den Punkten α und β schneidet, so sind die Punkte



α und β als Punkte von p konjugierte Pole zum Punkte π. Daher mufs auch umgekehrt die Polare des Punktes α oder mit andern Worten die in α an die Kurve gelegte Tangente durch den Punkt π gehen; der Punkt π ist der Schnittpunkt der beiden

Tangenten, welche in den beiden Schnittpunkten von p mit der Kurve an sie gelegt werden können.

Im Pol einer Geraden treffen sich die beiden Tangenten, welche in ihren Schnittpunkten mit der Kurve dieselbe berühren.

5. Soll umgekehrt die Tangente an einen Punkt α der Kurve durch einen gegebenen Punkt π gehen, so mufs der Punkt α auf der Polare von π liegen. Somit können nur die Tangenten an diejenigen Punkte der Kurve durch den Punkt π gehen, welche zugleich der Polare von π angehören. Da diese Gerade zwei Punkte mit der Kurve gemeinschaftlich hat, gehen auch durch den Punkt π zwei Tangenten der Kurve.

Durch jeden Punkt der Ebene gehen im allgemeinen zwei reelle oder imaginäre Tangenten an eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung.

6. Um hiernach von einem Punkte der Ebene aus die Tangenten an einen Kegelschnitt zu legen, konstruiere man die Polare des Punktes; die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve liefern uns diejenigen Punkte, deren Tangenten durch den gegebenen Punkt gehen. Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt geht durch die Berührungspunkte der beiden Tangenten, welche von dem Punkte aus an die Kurve gelegt werden können.

7. Eine ebene Kurve, an die man von jedem Punkte der Ebene aus im allgemeinen n Tangenten legen kann, nennen wir eine Kurve n^{ter} Klasse. Wir haben soeben gesehen, dafs wir an eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung von jedem Punkte der Ebene aus zwei reelle oder imaginäre Tangenten legen können; wir können diesen Satz jetzt auch in der Form aussprechen:

Eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung ist auch von der zweiten Klasse.

8. Der letzte Satz folgt auch aus der Bedingungsgleichung, welche zwischen den Koordinaten einer geraden Linie bestehen mufs, damit sie Tangente an eine Kurve zweiter Ordnung ist. Wir wollen diese Gleichung herleiten.

Die Gerade, von der die Kurve (1) in ihrem Punkte (x′) berührt wird, hat die Gleichung:

$$(3)\quad x_1(a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3')+x_2(a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3') \\ +x_3(a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3')=0.$$

Sollen u_1, u_2, u_3 die Koordinaten dieser geraden Linie sein, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$(4)\quad \begin{aligned} a_{11}x_1'+a_{12}x_2'+a_{13}x_3' &= \varrho u_1 \\ a_{21}x_1'+a_{22}x_2'+a_{23}x_3' &= \varrho u_2 \\ a_{31}x_1'+a_{32}x_2'+a_{33}x_3' &= \varrho u_3. \end{aligned}$$

Wenn hierin aufser den Koefficienten in der Gleichung der Kurve noch die Gröfsen ϱ, u_1, u_2, u_3 gegeben sind, so kann man aus diesen Gleichungen die Werte für x_1', x_2', x_3' berechnen, falls die Determinante

$$(5)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist. Dabei ergeben sich x_1', x_2', x_3' als homogene lineare Funktionen von u_1, u_2, u_3. Indem man diese Werte in die Gleichung

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa' = 0$$

einsetzt, hebt sich ϱ^2 als gemeinschaftlicher Faktor weg und wir erhalten in u_1, u_2, u_3 eine Gleichung zweiten Grades.

Die Bedingung dafür, dafs eine gerade Linie Tangente an eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung ist, stellt sich in ihren Koordinaten als homogene quadratische Gleichung dar.

9. Wir bezeichnen die Determinante (5) kurz durch A und ihre Unterdeterminanten durch $A_{\iota\varkappa}$; es soll in A das Element a_{11} mit A_{11}, das Element a_{12} mit A_{12} u. s. w. multipliziert sein. Dann ist $A_{12}=-a_{21}a_{33}+a_{23}a_{31}$, $A_{21}=-a_{12}a_{33}+a_{32}a_{13}$, also $A_{12}=A_{21}$; ebenso ist allgemein $A_{\iota\varkappa}=A_{\varkappa\iota}$.

Die Gleichungen (4) haben folgende Auflösungen:

$$(6)\quad \begin{aligned} Ax_1' &= \varrho(u_1A_{11}+u_2A_{21}+u_3A_{31}) \\ Ax_2' &= \varrho(u_1A_{12}+u_2A_{22}+u_3A_{32}) \\ Ax_3' &= \varrho(u_1A_{13}+u_2A_{23}+u_3A_{33}). \end{aligned}$$

Nun soll der Punkt (x') als Berührungspunkt in seiner Polaren (u_1, u_2, u_3) liegen; es mufs daher die Gleichung bestehen:

$$(7)\quad u_1x_1'+u_2x_2'+u_3x_3'=0.$$

Indem wir hierin für x_1', x_2', x_3' die in (6) angegebenen Werte einsetzen, erhalten wir die Gleichung:

$$(A_{11}u_1 + A_{21}u_2 + A_{31}u_3)u_1 + (A_{12}u_1 + A_{22}u_2 + A_{32}u_3)u_2 + (A_{13}u_1 + A_{23}u_2 + A_{33}u_3)u_3 = 0$$

oder

$$(8) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0.$$

10. Diese Form der Gleichung können wir durch eine andere ersetzen, zu der wir auf folgendem Wege gelangen. Wir betrachten die drei Gleichungen (4) und die Gleichung (7) als vier homogene lineare Gleichungen in x_1', x_2', x_3', $-\varrho$. Diese können nur zusammen bestehen, wenn die aus ihren Koefficienten gebildete Determinante verschwindet. In der letzten Gleichung hat $-\varrho$ den Koefficienten null. Daher nimmt jetzt die gesuchte Bedingung folgende Form an:

$$(9) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bedingung, welche zwischen den Koordinaten einer geraden Linie bestehen mufs, damit sie Tangente an eine gegebene Kurve ist, nennen wir die Gleichung der Kurve in Linienkoordinaten.

Jetzt sagt die Gleichung (8) aus: Wenn man bei einer eigentlichen Kurve zweiter Ordnung von Punkt- zu Linienkoordinaten übergehen will, so mufs man die Koefficienten der Gleichung durch die entsprechenden Unterdeterminanten ihrer Determinante ersetzen.

Die durch die Gleichung (9) aufgestellte Regel drückt man auch wohl in folgender Weise aus: Um eine gegebene eigentliche Kurve zweiter Ordnung in Linienkoordinaten darzustellen, rändert man ihre Determinante mit den Koordinaten u_1, u_2, u_3.

11. Damit eine Gerade (u_1, u_2, u_3) durch den Punkt $(0, 0, 1)$ geht, mufs $u_3 = 0$ sein. Soll sie zugleich Tangente an die gegebene Kurve sein, so müssen ihre Koordinaten zugleich der Gleichung (8) genügen. Für jede durch den Punkt $(0, 0, 1)$ gehende Tangente gelten also die beiden Gleichungen:

$$u_3 = 0, \quad A_{11}u_1^2 + 2A_{12}u_1u_2 + A_{22}u_2^2 = 0.$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich zwei (reelle oder imaginäre) Verhältnisse $u_1 : u_2$; somit gehen durch den Punkt $(0, 0, 1)$ zwei reelle oder imaginäre Tangenten der Kurve.

Durch Umwandlung des Koordinatensystems zeigt man wieder, dafs die Auffindung der durch einen Punkt gehenden Tangenten von einer Gleichung zweiten Grades abhängt. Wir erkennen also auch auf dem hier eingeschlagenen Wege, dafs eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung von der zweiten Klasse ist.

Übungen:

1) Man bestimme die Gleichung der Tangenten, welche in den Schnittpunkten mit den Seiten des Koordinatendreiecks an folgende Kegelschnitte gelegt werden können:

a) $x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3 = 0.$

b) $2x_1^2 - 5x_1 x_2 - 3x_2^2 + 9x_1 x_3 - 13x_2 x_3 + 10x_3^2 = 0.$

c) $3x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 + 8x_1 x_3 + 4x_3^2 = 0.$

d) $x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + 5x_3^2 = 0.$

2) Man suche für die Kurven a) und d) den Schnittpunkt von je zwei der eben gefundenen Tangenten und zeige, dafs derselbe der Pol zu der Verbindungslinie der Berührungspunkte ist. Gilt dies auch für diejenigen Kurven zweiter Ordnung, welche durch die Gleichungen b) und c) dargestellt werden? Welchen Wert haben die Determinanten dieser beiden Linien?

3) Man konstruiere mit blofser Hilfe des Lineals die beiden Tangenten, welche von einem gegebenen Punkte aus an einen gezeichnet vorliegenden Kegelschnitt gezogen werden können.

4) Man stelle die Gleichungen der Tangenten auf, welche von den Eckpunkten des Koordinatendreiecks an die unter 1) d) gegebene Kurve gelegt werden können.

5) Man stelle folgende Kurven in Linienkoordinaten dar:

a) $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0.$

b) $x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3 = 0.$

c) $x_1^2 - 2x_2 x_3 = 0.$

d) $x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 x_3 + 2x_2 x_3 + 5x_3^2 = 0.$

6) a) Welche Gleichung hat der Kegelschnitt, der von den Geraden $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ in seinen Schnittpunkten mit der Geraden $x_1 = 0$ berührt wird?

b) Der hier angegebene Kegelschnitt soll durch den Einheitspunkt gehen.

c) Für ihn sollen die Punkte (1, 0, 1) und (1, 1, 0) konkugierte Pole sein.

7) Ein Kegelschnitt K, zwei seiner Tangenten t und t' und eine beliebige Gerade g sind gegeben. Auf jeder Tangente von K suche man denjenigen Punkt, welcher dem Schnittpunkte mit g in Bezug auf die Schnittpunkte mit t und t' harmonisch zugeordnet ist, und bestimme den geometrischen Ort für alle auf diese Weise sich ergebenden Punkte.

(Zu Koordinaten wähle man die festen Tangenten und ihre Berührungssehne.)

8) Einem Dreieck ist ein Kegelschnitt umbeschrieben. Zu jeder in einem Eckpunkte berührenden Geraden konstruiere man in Bezug auf die von ihm ausgehenden Seiten den vierten harmonischen Strahl. Wie liegen diese drei geraden Linien zu einander?

(Der Koordinatenbestimmung lege man das gegebene Dreieck zu Grunde.)

9) a) Jede Gerade, welche durch einen festen Punkt geht, werde als Harmonikale eines Punktes in Bezug auf ein gegebenes Dreieck angesehen. Die Gesamtheit der Punkte, zu denen eine solche Gerade Harmonikale ist, bildet einen Kegelschnitt, der durch die Eckpunkte des Dreiecks geht.

(Das Koordinatendreieck wie in 8).)

b) Um ein gegebenes Dreieck läfst sich ein Kegelschnitt beschreiben, der die Halbierungslinien seiner Aufsenwinkel berührt. Die Harmonikale zu allen Punkten dieser Kurve in Bezug auf das Dreieck gehen durch den Mittelpunkt des dem Dreiecke einbeschriebenen Kreises.

(Man wähle die Seiten des Dreiecks zu Koordinatenaxen und den Mittelpunkt des innern Berührungskreises zum Einheitspunkte.)

10) Jeder von drei Kegelschnitten berührt zwei Seiten eines festen Dreiecks in ihren Schnittpunkten mit der dritten Seite; zudem sollen die drei Kurven durch denselben Punkt π gehen. In diesem Punkte lege man an jeden der drei Kegelschnitte die Tangente und bestimme ihren Schnittpunkt mit derjenigen Dreiecksseite, welche von der Kurve nicht berührt wird. Welche Lage haben die drei Schnittpunkte zu einander?

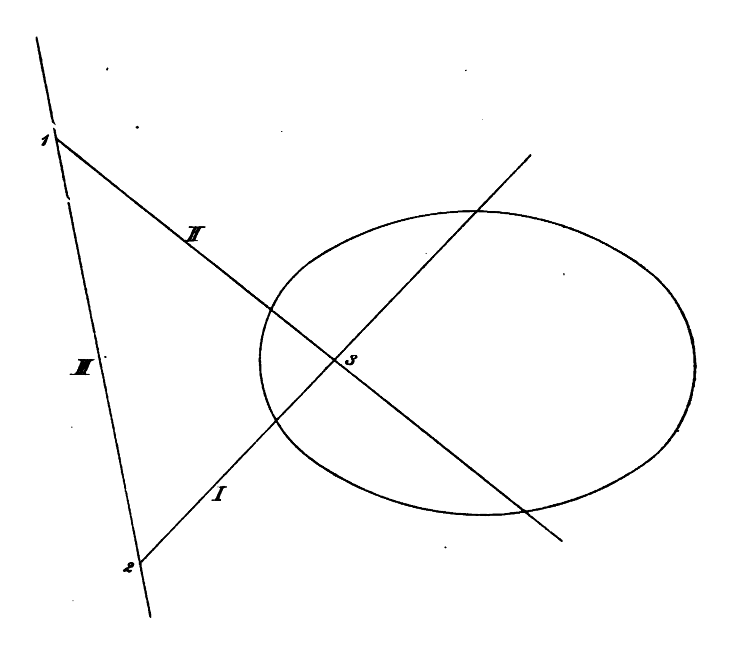
(Ist $A_1A_2A_3$ das Dreieck, so möge der Kegelschnitt K_1 durch die Punkte A_2 und A_3 gehen und von den Geraden A_1A_2 und

$A_1 A_3$ berührt werden; entsprechend habe K_2 die Gerade $A_2 A_1$ und $A_2 A_3$ zu Tangenten und gehe durch A_1 und A_3; ähnliches gelte vom Kegelschnitt K_3. Die in dem gemeinschaftlichen Punkte π an K_1 gelegte Tangente t_1 treffe $A_2 A_3$ in α_1, ebenso die in π an K_2 gelegte Tangente t_2 die Gerade $A_3 A_1$ in α_2, und in entsprechender Weise soll α_3 in $A_1 A_2$ liegen. Man gebe die Koordinaten der Punkte α_1, α_2, α_3 an, nachdem die Punkte A_1, A_2, A_3 zu Eckpunkten des Koordinatendreiecks und π zum Einheitspunkte gewählt ist.)

§ 15.

Die Polardreiecke einer Kurve zweiter Ordnung.

1. Wenn eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung gegeben ist, so wählen wir in ihrer Ebene einen Punkt 1 beliebig, jedoch so, dafs er der Kurve nicht angehört. Auf seiner Polare I nehmen wir einen Punkt 2 an und verlangen wiederum nur, dafs er mit keinem Schnittpunkte der Geraden und der Kurve zusammenfällt. Dann geht die Polare II des Punktes 2 durch den Punkt 1 und schneidet die Gerade I in einem von 2 verschiedenen Punkte 3.



Da die Punkte 1 und 2 konjugierte Pole zum Punkte 3 sind, ist die Gerade III, welche die Punkte 1 und 2 verbindet, die Polare des Punktes 3. Jede Seite des Dreiecks (1 2 3) ist also die Polare zu der gegenüberliegenden Ecke. Ein Dreieck, welches diese Eigenschaft hat, heifst ein Polardreieck der Kurve oder auch ein zu sich selbst konjugiertes Dreieck.

2. Zu einer eigentlichen Kurve zweiter Ordnung giebt es unendlich viele Polardreiecke. Man kann den einen Eckpunkt willkürlich wählen und hat nur die Punkte der Kurve auszuschliefsen; der zweite Eckpunkt kann noch jede Lage auf einer geraden Linie erhalten mit Ausschlufs ihrer Schnittpunkte mit der Kurve. Hiernach kann man das Polardreieck von drei willkürlichen Gröfsen abhängig machen, nämlich

a) von zwei Gröfsen, durch welche die Lage des ersten Eckpunktes in der Ebene bestimmt wird, und

b) von einer Gröfse, mittelst deren man die Lage des zweiten Eckpunktes in der Polare des ersten Punktes angiebt.

Wenn ein Gebilde von m willkürlichen Gröfsen abhängt, so legt man ihm eine m-fache Unendlichkeit bei; wir dürfen daher sagen, die Polardreiecke einer eigentlichen Kurve zweiter Ordnung bildeten eine dreifache Unendlichkeit.

3. Wenn ein Polardreieck zum Koordinatendreieck gewählt wird, so nimmt die Gleichung der Kurve eine höchst bemerkenswerte Form an. Sind die neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3, so wissen wir bereits, dafs auch in ihnen die Gleichung der Kurve vom zweiten Grade ist; sie hat also die Form:

$$b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 + 2b_{12}y_1y_2 + 2b_{13}y_1y_3 + 2b_{23}y_2y_3 = 0.$$

Nun sind die Punkte (1, 0, 0) und (0, 1, 0) konjugierte Pole für die Kurve; die Gleichung

$$\Sigma b_{\iota\varkappa}\, y_\iota' y_\varkappa'' = 0$$

mufs also befriedigt werden, wenn man $y_1' = 1$, $y_2' = y_3' = 0$ und $y_1'' = y_3'' = 0$, $y_2'' = 1$ setzt. Daraus folgt $b_{12} = 0$.

Ebenso ergiebt sich $b_{13} = 0$ daraus, dafs die Punkte (1, 0, 0) und (0, 0, 1) konjugierte Pole sind; und weil die Punkte (0, 1, 0) und (0, 0, 1) konjugierte Pole sind, mufs auch $b_{23} = 0$ sein.

Die Gleichung der Kurve wird also:

$$b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 + b_{33}y_3^2 = 0;$$

sie enthält nur die Quadrate der Koordinaten.

Von den drei Koefficienten b_{11}, b_{22}, b_{33} kann aber keiner gleich null werden, weil sonst die Determinante verschwinden und die Gleichung somit eine uneigentliche Kurve zweiter Ordnung darstellen würde.

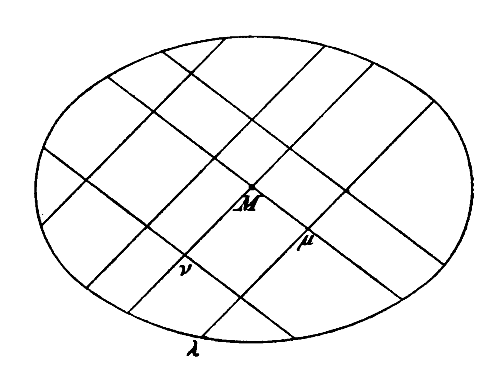
4. Statt von einem Eckpunkte kann man auch von einer Seite des Polardreiecks ausgehen. Man wählt zunächst eine Gerade I willkürlich und legt durch ihren Pol 1 eine beliebige zweite Gerade II. Dann ist der Schnittpunkt dieser beiden Geraden der Pol zu der Verbindungslinie des Punktes 1 mit dem Pole 2 von II. Die drei auf diese Weise gefundenen Geraden schliefsen ein Dreieck ein, wofern nur keine der Geraden I und II die Kurve berührt; und dies Dreieck ist ein Polardreieck.

5. Wenn die unendlichferne Gerade einen Kegelschnitt nicht berührt, so liegt ihr Pol nicht in dieser Geraden und ist infolge dessen ein eigentlicher Punkt. Legt man durch diesen Punkt M eine beliebige Gerade, welche die Kurve in den Punkten α und β schneidet, so wird die Strecke $\alpha\beta$ im Punkte M und im unendlichfernen Punkte der Geraden harmonisch geteilt, oder die Strecke $\alpha\beta$ wird im Punkte M halbiert. Der Pol der unendlichfernen Geraden hat also die Eigenschaft, dafs jede hindurchgehende Sehne in ihm halbiert wird. Aus diesem Grunde heifst er der Mittelpunkt der Kurve; jede durch ihn hindurchgehende Gerade nennt man einen Durchmesser der Kurve.

6. Nimmt man die unendlichferne Gerade zu der einen Seite eines Polardreiecks, so kann man zur zweiten Seite einen beliebigen Durchmesser der Kurve wählen. Dadurch erhält man ein Polardreieck, von dem zwei Eckpunkte ins Unendlichferne, der dritte in den Mittelpunkt fällt. Die beiden eigentlichen Geraden, welche seiner Begrenzung angehören, sind zwei Durchmesser, welche als konjugierte Durchmesser bezeichnet werden. Den einen dieser beiden Durchmesser kann man noch willkürlich wählen; dadurch ist der andere eindeutig bestimmt.

7. Jede Gerade, welche durch einen Eckpunkt eines Polardreiecks geht, trifft die gegenüberliegende Seite in einem Punkte, der zu dem ausgewählten Eckpunkte in Bezug auf die Schnittpunkte

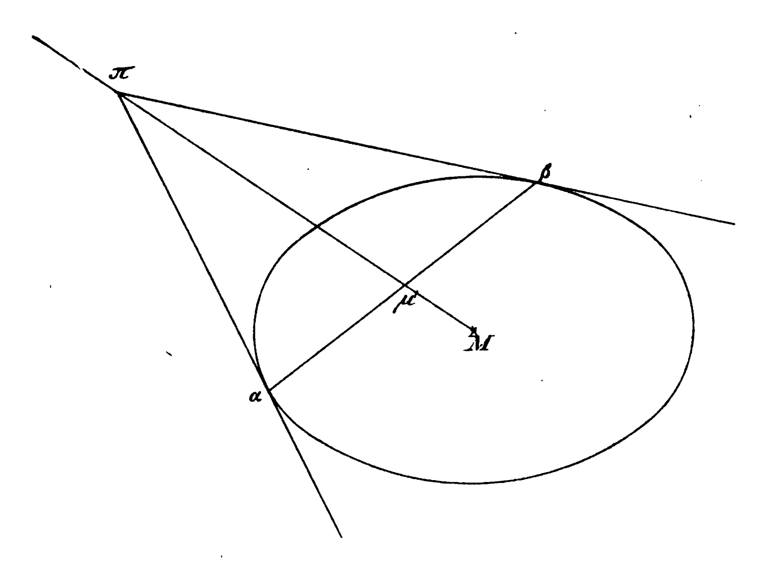
mit der Geraden harmonisch liegt. Durch den unendlichfernen Punkt des Durchmessers MA geht jede zu ihm parallele Gerade; wenn eine solche die Kurve in den Punkten $\varkappa$ und λ und den konjugierten Durchmesser im Punkte μ trifft, so wird die Sehne $\varkappa\lambda$ im Punkte μ und in ihrem unendlichfernen Punkte harmonisch geteilt; sie wird mit andern Worten im Punkte μ halbiert. Zugleich wird aber jede Sehne, welche durch den unendlichfernen Punkt des zu MA konjugierten Durchmessers MB geht, in diesem Punkte und in dem Schnittpunkte mit MA harmonisch geteilt. Zwei konjugierte Durchmesser haben somit die Eigenschaft, dafs jede Sehne, welche zu dem einen parallel ist, durch den andern halbiert wird.



8. Der Pol eines Durchmessers ist der unendlichferne Punkt des konjugierten Durchmessers; durch ihn gehen die beiden Tangenten, welche im Endpunkte des gegebenen Durchmessers an die Kurve gelegt werden können. Mit andern Worten:

Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind zum konjugierten Durchmesser (und demnach auch einander) parallel.

9. Wenn man von einem beliebigen Punkte aus die Tangenten an eine Kurve zweiter Ordnung zieht, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den Pol einer jeden Geraden, welche durch den gegebenen Punkt gelegt werden kann, somit auch durch den Pol des nach diesem Punkte hin gezogenen Durchmessers, d. h. durch den unendlichfernen Punkt des konjugierten Durchmessers. Die Berührungssehne wird durch den ersten Durchmesser halbiert. Sind α und β die Berührungspunkte der von π ausgehenden Tangenten, so wird die Sehne $\alpha\beta$ durch den Durchmesser $M\pi$ halbiert.



Die Berührungssehne von zwei beliebigen Tangenten wird durch den nach ihrem Schnittpunkte gezogenen Durchmesser halbiert.

10. Da zwei Eckpunkte eines Polardreiecks harmonisch liegen zu den Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit der Kurve, so liegen auch zwei konjugierte Durchmesser jedesmal harmonisch zu den vom Mittelpunkte ausgehenden Tangenten der Kurve (den Asymptoten).

Übungen:

1) a) Wieviel Bedingungen für die Bestimmung eines Kegelschnitts vertritt die Forderung, dafs er ein festes Dreieck zum Polardreieck haben soll?

b) Die Gleichung eines Kegelschnitts bestimmen, der das Koordinatendreieck zum Polardreieck hat und durch zwei gegebene Punkte geht!

c) Alle Kegelschnitte, welche ein gegebenes Polardreieck besitzen und durch einen festen Punkt gehen, haben noch drei weitere Punkte gemeinschaftlich. Man bestimme die Koordinaten dieser drei Punkte unter der Annahme, dafs das gegebene Dreieck Koordinatendreieck und der gegebene Punkt der Einheitspunkt ist.

d) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, der ein gegebenes Polardreieck hat und für den ein Punkt eine vorgeschriebene Polare besitzt.

e) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, der zwei Gerade zu konjugierten Durchmessern hat und durch zwei gegebene Punkte geht.

f) Einen Kegelschnitt zu bestimmen, der zwei feste Gerade zu konjugierten Durchmessern hat und für den die Polare eines gegebenen Punktes mit einer vorgeschriebenen Geraden zusammenfällt.

2) a) Die Tangenten, welche in den Schnittpunkten einer Seite eines Polardreiecks mit einem Kegelschnitt an denselben gelegt werden können, schneiden sich jedesmal im dritten Eckpunkte.

b) Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel.

c) Die Berührungspunkte paralleler Tangenten sind die Endpunkte eines Durchmessers.

3) a) Ist das Dreieck $\lambda\mu\nu$ ein Polardreieck eines Kegelschnitts, schneidet die Seite $\lambda\mu$ in α, $\lambda\nu$ in β und treffen die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes von $\mu\nu$ mit den Punkten α und β den Kegelschnitt zum zweitenmale in γ und δ, so bilden auch die Geraden $\lambda\gamma$ und $\lambda\delta$ mit $\mu\nu$ ein Polardreieck der Kurve.

b) Die Schnittpunkte paralleler Sehnen, welche durch die Endpunkte konjugierter Durchmesser eines Kegelschnitts gehen, treffen die Kurve in zwei Punkten, welche ebenfalls konjugierten Durchmessern angehören.

(Sind $M\alpha$ und $M\beta$ konjugierte Halbmesser, sind die Sehnen $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$ parallel, so sind auch $M\gamma$ und $M\delta$ konjugierte Halbmesser.)

4) a) Die Diagonalpunkte eines in einen Kegelschnitt beschriebenen Vierecks sind die Eckpunkte eines Polardreiecks der Kurve.

b) Die Seiten eines in einen Kegelschnitt einbeschriebenen Parallelogramms sind einem Paare konjugierter Durchmesser parallel.

5) a) Sind λ, μ, ν die Eckpunkte eines Polardreiecks, ist α ein Punkt des Kegelschnitts, so wird die Kurve von den Geraden

$a\lambda$ und $a\mu$ in zwei Punkten geschnitten, welche mit dem Punkte ν in gerader Linie liegen.

b) Man kann einem Kegelschnitt unendlich viele Dreiecke einbeschreiben, deren Seiten (teils zwischen den Eckpunkten, teils in der Verlängerung) der Reihe nach durch die Eckpunkte eines seiner Polardreiecke gehen.

c) Die durch einen Punkt eines Kegelschnitts zu konjugierten Durchmessern gezogenen Parallelen treffen die Kurve noch in den Endpunkten eines Durchmessers.

d) Die Verbindungslinie eines Punktes einer Kurve zweiter Ordnung mit den Endpunkten eines Durchmessers sind konjugierten Durchmessern parallel.

6) a) Ein Kegelschnitt ist bestimmt durch seinen Mittelpunkt und drei seiner Punkte.

b) Nachdem drei Punkte eines Kegelschnitts gegeben sind, kann man den Mittelpunkt noch willkürlich wählen.

c) Ein Kegelschnitt ist bestimmt durch seinen Mittelpunkt und eines seiner Polardreiecke.

7) Das Doppelverhältnis von vier Durchmessern ist jedesmal gleich dem Doppelverhältnisse der konjugierten Durchmesser.

8) Die Polare zu dem unendlichfernen Punkte eines Durchmessers ist der konjugierte Durchmesser.

9) a) In den Schnittpunkten zweier Seiten eines Polardreiecks sind die Tangenten an die Kurve gelegt; man suche den geometrischen Ort des Schnittpunktes dieser Tangenten, wenn die beiden schneidenden Seiten sich so um ihren gemeinsamen Punkt drehen, dafs sie immer mit der dritten gegebenen Seite ein Polardreieck der Kurve bilden.

b) Man soll den Ort der Schnittpunkte derjenigen Tangenten bestimmen, welche in den Endpunkten konjugierter Durchmesser an die Kurve gelegt werden können.

10) a) Verbindet man die Punkte, in denen zwei Tangenten eines Kegelschnitts eine dritte Tangente treffen, mit einem Punkte der Berührungssehne, so sind diese geraden Linien zwei Seiten eines Polardreiecks der Kurve.

b) Die Punkte, in denen zwei parallele Tangenten von einer beliebigen dritten Tangente eines Kegelschnitts getroffen werden, gehören konjugierten Durchmessern an.

§ 16.

Das Linienpaar.

1. Wir haben bisher angenommen, dafs die Determinante aus den Koefficienten der Gleichung

$$(1) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$

nicht verschwindet, dafs es daher auch keinen Punkt (ξ) giebt, dessen Koordinaten den Gleichungen genügen:

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 &= 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 &= 0 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Diejenigen Kurven, zu denen wir unter dieser Annahme gelangten, nannten wir eigentliche Kurven zweiter Ordnung. Wir wollen jetzt die uneigentlichen Kurven zweiter Ordnung untersuchen und nehmen zu dem Ende zuvörderst an, es gebe einen einzigen Punkt (ξ), durch dessen Koordinaten die Gleichungen (2) befriedigt werden.

Die Gleichung

$$(3) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota \xi_\varkappa = 0,$$

welche die Bedingung dafür darstellt, dafs die Punkte (ξ) und (x) konjugierte Pole in Bezug auf die Kurve (1) sind, kann auch in der Form geschrieben werden:

$$x_1 (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3) + x_2 (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3) \\ + x_3 (a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3) = 0.$$

Da hierin nach (2) die Koefficienten von x_1, x_2, x_3 verschwinden, wird die Gleichung (3) für jeden Punkt (x_1, x_2, x_3) befriedigt; der Punkt (ξ) ist konjugierter Pol zu jedem Punkte der Ebene. Wir nennen ihn den singulären Punkt der Kurve.

Die Gleichung (3) wird auch befriedigt, wenn man den Punkt (x) durch den Punkt (ξ) ersetzt; somit gehört auch der singuläre Punkt der Kurve (1) an.

2. Damit die Kurve nur einen singulären Punkt besitzt, damit also alle Lösungen der Gleichungen (2) aus einer einzigen durch Multiplikation mit demselben Faktor erhalten werden, mufs die aus den Koefficienten dieser Gleichungen gebildete Determinante

verschwinden, ohne dafs ihre sämtlichen Unterdeterminanten gleich null sind. Es mufs daher

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

sein; aber unter den Unterdeterminanten der linken Seite mufs sich mindestens eine befinden, die von null verschieden ist. Dies ist die Annahme, die wir vorläufig unsern Untersuchungen zu Grunde legen.

3. Soll der Punkt (x) konjugierter Pol zu einem gegebenen Punkte (x') sein, so mufs die Bedingung erfüllt werden:

$$(5)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa' = 0,$$

welche sowohl in der Form

$$(5')\quad x_1 \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa' + x_2 \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa' + x_3 \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa' = 0$$

als auch in der Form

$$(5'')\quad x_1' \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa + x_2' \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa + x_3' \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa = 0$$

geschrieben werden kann. Die Form (5') zeigt, dafs die Koefficienten von x_1, x_2, x_3 nicht gleichzeitig verschwinden, sobald der Punkt (x') vom Punkte (ξ) verschieden ist. Daher haben alle Punkte der Ebene mit Ausnahme des singulären Punktes eine Polare; d. h. zu einem jeden solchen Punkte sind nur diejenigen Punkte konjugierte Pole, welche auf einer bestimmten Geraden liegen.

Aus der Form (5″) geht hervor, dafs die Gleichung (5) befriedigt wird, wenn man (x_1, x_2, x_3) durch (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ersetzt. Die Polare zu einem beliebigen Punkte der Ebene geht durch den singulären Punkt.

4. Allgemein ist

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \mu\xi_\iota)(x_\varkappa'' + \nu\xi_\varkappa) =$$
$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' + \mu \Sigma a_{\iota\varkappa} \xi_\iota x_\varkappa'' + \nu \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' \xi_\varkappa + \mu\nu \Sigma a_{\iota\varkappa} \xi_\iota \xi_\varkappa.$$

In unserm Falle verschwinden die Koefficienten von μ, ν und von $\mu\nu$ wegen der Bedingungen (2). Wenn jetzt die Punkte (x') und (x″) konjugierte Pole in Bezug auf die Kurve sind, wenn also die Gleichung befriedigt ist:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0,$$

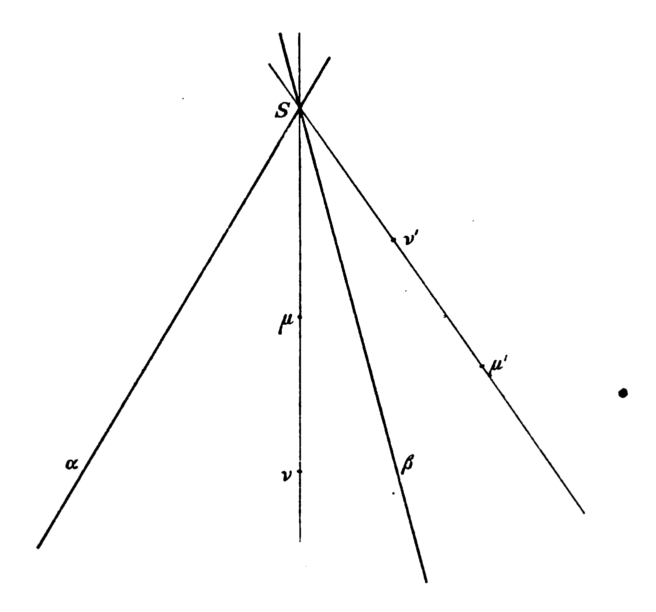
so verschwindet auch das erste Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung. Daher sind auch die Punkte
$(x_1'+\mu\xi_1, x_2'+\mu\xi_2, x_3'+\mu\xi_3)$ und $(x_1''+\nu\xi_1, x_2''+\nu\xi_2, x_3''+\nu\xi_3)$ konjugierte Pole. Nun stellen die Koordinaten

$$(x_1' + \mu\xi_1, x_2' + \mu\xi_2, x_3' + \mu\xi_3)$$

einen beliebigen Punkt auf der Geraden dar, welche den Punkt (x') mit dem singulären Punkte (ξ) verbindet. Ebenso ist

$$(x_1'' + \nu\xi_1, x_2'' + \nu\xi_2, x_3'' + \nu\xi_3)$$

ein beliebiger Punkt auf der Verbindungslinie der Punkte (x'') und (ξ). Wenn daher (x') und (x'') zwei konjugierte Pole sind, so ist auch jeder Punkt der Geraden, welche den Punkt (x'') mit dem singulären Punkte verbindet, konjugiert zu jedem Punkte auf



der Verbindungslinie des Punktes (x') mit dem singulären Punkte. Jede dieser beiden Geraden ist Polare zu allen Punkten der andern. Alle Punkte, welche mit dem singulären Punkte in gerader Linie liegen, haben dieselbe Polare.

W e n n e i n e K u r v e z w e i t e r O r d n u n g e i n e n s i n g u l ä r e n P u n k t h a t, s o w e r d e n d i e d u r c h d i e s e n P u n k t g e h e n d e n G e r a d e n e i n a n d e r p a a r w e i s e s o z u g e o r d n e t, d a f s d i e

eine der beiden einander entsprechenden Geraden jedesmal die Polare zu allen auf der andern Geraden liegenden Punkten ist.

Wir nennen zwei solche Gerade *konjugierte Polare* in Bezug auf die Kurve.

5. Wenn ein Punkt auf der Kurve (1) liegt, so mufs jeder Punkt seiner Verbindungslinie mit dem singulären Punkte konjugierter Pol zu allen Punkten dieser Geraden sein; diese Verbindungsgerade wird daher selbst der Kurve angehören. Davon überzeugt man sich, ohne auf den vorangehenden Satz Rücksicht zu nehmen, in folgender Weise:

Es ist:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}(x_\iota + \mu\xi_\iota)(x_\varkappa + \mu\xi_\varkappa) =$$
$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa + \mu \Sigma a_{\iota\varkappa} \xi_\iota x_\varkappa + \mu \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota \xi_\varkappa + \mu^2 \Sigma a_{\iota\varkappa} \xi_\iota \xi_\varkappa$$
$$= \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa .$$

Wenn also der Punkt (x_1, x_2, x_3) auf der Kurve liegt, so gehört ihr auch der Punkt $(x_1 + \mu\xi_1, x_2 + \mu\xi_2, x_3 + \mu\xi_3)$ an. Somit zerfällt die Kurve in gerade Linien. Nun schneidet jede der Geraden, aus denen unsere Kurve besteht, eine beliebige gerade Linie in einem Punkte; die Zahl der Schnittpunkte der Kurve ist also gleich der Zahl der Geraden.

Jede Kurve zweiter Ordnung, welche einen (einzigen) singulären Punkt enthält, zerfällt in ein Geradenpaar.

6. Diese Behauptung können wir auch auf einem andern Wege beweisen. Wir beziehen die Kurve auf ein Koordinatendreieck, von dem zwei Seiten $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ konjugierte Polare sind, während die dritte Seite $y_3 = 0$ willkürlich ist. Wenn die Gleichung der Kurve in den neuen Koordinaten ist:

$$\Sigma b_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa = 0,$$

so gehen die Gleichungen (2), weil der singuläre Punkt die Koordinaten (0, 0, 1) hat, über in

$$b_{13} = 0, \; b_{23} = 0, \; b_{33} = 0.$$

Es sollen aber auch die Punkte (1, 0, 0) und (0, 1, 0) konjugierte Pole in Bezug auf die Kurve sein; daher mufs auch $b_{12} = 0$ sein. Die Gleichung nimmt also in den neuen Koordinaten die Gestalt an:

$$(6) \quad b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 = 0.$$

Von den beiden Koefficienten b_{11} und b_{22} darf keiner gleich null sein, weil sonst die sämtlichen Unterdeterminanten zweiten Grades verschwänden.

Wenn für eine Kurve zweiter Ordnung die Determinante verschwindet, ohne dafs die sämtlichen Unterdeterminanten gleich null sind, so läfst sich die Gleichung der Kurve durch zwei Quadrate darstellen.

7. Die Gleichung (6) kann man leicht in das Produkt von zwei linearen Faktoren zerlegen; es ist nämlich

$$b_{11}y_1^2 + b_{22}y_2^2 =$$
$$(y_1\sqrt{b_{11}} + y_2\sqrt{-b_{22}})\,(y_1\sqrt{b_{11}} - y_2\sqrt{-b_{22}}).$$

Die rechte Seite verschwindet, wenn entweder

$$y_1\sqrt{b_{11}} + y_2\sqrt{-b_{22}} = 0$$

oder

$$y_1\sqrt{b_{11}} - y_2\sqrt{-b_{22}} = 0$$

ist, wenn also der Punkt auf einer der beiden Geraden liegt, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden.

Wir fassen die Resultate in folgender Weise zusammen:

Wenn für eine Kurve zweiter Ordnung die Determinante verschwindet, so zerfällt die Kurve in zwei gerade Linien; der Schnittpunkt derselben ist der singuläre Punkt, dem jeder Punkt der Ebene als Pol zugeordnet ist. Wenn zwei durch den Schnittpunkt gehende gerade Linien harmonisch liegen zu den Geraden des Paares, so sind sie konjugierte Polare in Bezug auf die Kurve; zu jedem Punkte der einen Geraden ist jedesmal die andere konjugierte Polare.

Übungen:

1) Welche Linienpaare werden durch die folgenden Gleichungen dargestellt?

a) $3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 8x_1x_3 + 9x_3^2 = 0.$

b) $3x_1^2 + 10x_1x_2 + 7x_2^2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + x_3^2 = 0.$

c) $2x_1^2 - 5x_1x_2 - 3x_2^2 + 9x_1x_3 - 13x_2x_3 + 10x_3^2 = 0.$

(Indem man für die linke Seite die Form

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)\,(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3)$$

ansetzt, sieht man sehr leicht, welche Werte man den Koefficienten m und n beilegen mufs.)

2) Man zeige, dafs die Determinanten aus den Koefficienten der in 1) angegebenen Gleichungen verschwinden.

3) Man zerlege die in drei Variabeln homogene quadratische Form $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa$, für welche die Determinante aus den Koefficienten verschwindet, in zwei lineare Faktoren.

Wenn die Determinante verschwindet, aber $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ von null verschieden ist, so kann man zwei Koefficienten λ und μ in der Weise bestimmen, dafs ist:

$$a_{13} = \lambda a_{11} + \mu a_{12}, \quad a_{23} = \lambda a_{21} + \mu a_{22},$$
$$a_{33} = \lambda a_{31} + \mu a_{32} = \lambda^2 a_{11} + 2\lambda\mu a_{12} + \mu^2 a_{22}.$$

Jetzt setze man $y_1 = x_1 + \lambda x_3$, $y_2 = x_2 + \mu x_3$; alsdann wird die gegebene Form gleich

$$a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 =$$
$$\frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}y_1 + (a_{12}\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})y_2\right)$$
$$\left(a_{11}y_1 + (a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}})\, y_2\right).$$

4) Man stelle die Form $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa$ vermittelst der Variabeln x_1, x_2, x_3 und der Koefficienten a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23} dar, nachdem a_{33} so bestimmt ist, dafs die Determinante verschwindet.

5) Man stelle die linken Seiten der in 1) angegebenen Gleichungen durch zwei Quadrate dar.

6) Man weise direkt nach, dafs die Gleichung für jedes Geradenpaar eine verschwindende Determinante hat.

(Es sei

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = (m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)\,(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3).$$

Dann folgt

$$2a_{11} = 2m_1n_1, \quad 2a_{12} = m_1n_2 + m_2n_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Für den Schnittpunkt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) der Geraden (m) und (n) ist

$$m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 = 0, \quad n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + n_3\xi_3 = 0.$$

Somit ist auch

$$2\,(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}x_3) = m_1\,(n_1\xi_1 + n_2\xi_2 + n_3\xi_3)$$
$$+ n_1\,(m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3).$$

Daraus folgen die oben unter (2) angegebenen Gleichungen, aus denen sich das Verschwinden der Determinante ergiebt.)

7) Man zeige durch Rechnung, dafs, wenn für die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung die Determinante aus den Koefficienten bei einem bestimmten Koordinatensystem verschwindet, die

Koefficienten für jedes andere Koordinatensystem dieselbe Eigenschaft haben.

(Der Beweis stützt sich auf den Satz über die Multiplikation zweier Determinanten.)

8) Welche Verschiedenheit zeigt ein Linienpaar in seinen Polareigenschaften von einer eigentlichen Kurve zweiter Ordnung?

Man beantworte folgende Fragen:

Hat jeder Punkt in Bezug auf ein Linienpaar eine Polare?

Können alle Gerade als Polare in Bezug auf ein Linienpaar angesehen werden?

Hat eine Gerade, falls sie Polare für ein Linienpaar ist, einen einzigen Pol?

§ 17.

Die Doppelgerade.

1. Wenn alle Unterdeterminanten zweiten Grades der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

verschwinden, so kommen die Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 &= 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 &= 0 \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

auf eine einzige Gleichung hinaus. Den drei Gleichungen genügen alle Punkte einer geraden Linie. Jeder Punkt dieser Geraden befriedigt die Gleichung

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota \xi_\varkappa = 0$$

bei beliebigen Werten von x_1, x_2, x_3; er ist konjugierter Pol zu allen Punkten der Ebene in Bezug auf die Kurve

$$(2)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0.$$

Unter der angegebenen Bedingung gehört zur Kurve eine singuläre Linie, d. h. eine Gerade, deren Punkte konjugierte Pole zu allen Punkten der Ebene sind.

2. Gehört der Punkt (x') der singulären Linie nicht an, so hat seine Polare die Gleichung:

$$(3)\quad x_1' \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa + x_2' \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa + x_3' \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa = 0.$$

Da die drei Summen in dieser Gleichung sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, so stellt sie bei jedem Werte (x_1', x_2', x_3') die singuläre Linie dar. Somit ist die singuläre Gerade gemeinschaftliche Polare für alle Punkte der Ebene.

3. Schon hieraus können wir schliefsen, dafs die linke Seite der Gleichung (2) das Quadrat eines linearen Ausdrucks darstellt. Der Gleichung können nur solche Punkte genügen, die in ihrer Polare liegen; die einzige Polare ist die singuläre Linie; also wird die Gleichung nur für die Punkte dieser Geraden befriedigt. Da sie aber zugleich vom zweiten Grade ist, mufs sie ein vollständiges Quadrat sein.

4. Dasselbe erkennen wir bei einer andern Wahl der Koordinaten. Wir wählen die singuläre Gerade zur ersten Seite $y_1 = 0$ des Koordinatendreiecks und nehmen zwei andere Gerade $y_2 = 0$ und $y_3 = 0$ beliebig hinzu. Die Gleichung der Kurve nimmt hierbei die Gestalt an:

$$\Sigma b_{\iota\varkappa} y_\iota y_\varkappa = 0,$$

und die singuläre Gerade $y_1 = 0$ mufs den Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3 &= 0 \\ b_{21} y_1 + b_{22} y_2 + b_{23} y_3 &= 0 \\ b_{31} y_3 + b_{32} y_2 + b_{33} y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Daher mufs $b_{12} = b_{13} = b_{22} = b_{23} = b_{33} = 0$ sein und die Gleichung (2) übergehen in

$$b_{11} y_1^2 = 0.$$

5. Wenn also die aus den Koefficienten der Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung gebildete Determinante nicht nur selbst verschwindet, sondern auch alle ihre Unterdeterminanten zweiten Grades null sind, so stellt die Gleichung eine Doppelgerade dar. Diese Gerade ist Polare zu allen Punkten der Ebene, und zu jedem ihrer Punkte sind alle Punkte der Ebene konjugierte Pole.

Übungen:

1) Wenn in der Form (1) der Koefficient a_{11} von null verschieden ist, aber alle Unterdeterminanten verschwinden, so soll der Ausdruck in ein Quadrat verwandelt werden.

(Setzt man $a_{12} = \lambda a_{11}$, $a_{13} = \mu a_{11}$, so kann man alle Koefficienten durch a_{11}, λ, μ ausdrücken und erhält die Darstellung: $a_{11}(x_1 + \lambda x_2 + \mu x_3)^2$).

2) Man wende diese Regel auf folgende Beispiele an:

a) $4x_1^2 + 12x_1x_2 + 9x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_3^2 = 0.$

b) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + \frac{4}{3}x_1x_3 + \frac{2}{3}x_2x_3 + \frac{1}{9}x_3^2 = 0.$

3) a) Wenn a_{11} von null verschieden ist, aber die Unterdeterminanten

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\quad a_{11}a_{33} - a_{13}^2,\quad a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}$$

verschwinden, so haben alle Unterdeterminanten der Determinante A den Wert null.

b) Dasselbe tritt ein, wenn a_{12} von null verschieden ist, aber die Unterdeterminanten

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\quad a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22},\quad a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$$

verschwinden.

c) Damit die Gleichung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ eine Doppelgerade darstellt, müssen zwischen den sechs Koefficienten drei Bedingungen bestehen.

(Dies folgt aus a) und b), kann aber auch durch Vergleichung der Zahl der Koefficienten einer quadratischen und einer linearen Form bewiesen werden.)

§ 18.

Einteilung der Kurven zweiter Ordnung.

1. In betreff der Determinante

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

welche aus den Koefficienten der Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung:

$$(2)\qquad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$$

gebildet wird, sind drei Fälle zu unterscheiden:

I. Die Determinante ist von null verschieden.

II. Die Determinante verschwindet, aber mindestens eine ihrer Unterdeterminanten ist von null verschieden.

III. Die sämtlichen Unterdeterminanten zweiten Grades sind gleich null.

Hierdurch wird auch eine naturgemäſse Einteilung der Kurven begründet.

2. Im Falle I stellt die Gleichung eine eigentliche Kurve

zweiter Ordnung dar. Jeder Punkt der Ebene hat eine einzige Polare, und jede Gerade kann zur Polare eines Punktes gewählt werden. Keine Gerade gehört der Kurve ganz an; jede hat vielmehr mit ihr höchstens zwei Punkte gemeinschaftlich. Ihre Gleichung läfst sich als Summe von drei Quadraten darstellen.

3. Im Falle II stellt die Gleichung ein Geradenpaar dar. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist konjugierter Pol zu allen Punkten der Ebene. Die durch diesen Punkt gehenden Geraden sind einander paarweise derartig zugeordnet, dafs jede Gerade eines Paares die Polare zu allen Punkten der andern Geraden ist.

4. Endlich stellt die Gleichung im Falle III eine Doppelgerade dar. Zu jedem Punkte dieser Geraden sind alle Punkte der Ebene konjugierte Pole; sie selbst ist die Polare zu allen ihr nicht angehörenden Punkten der Ebene.

5. Um eine weitere Einteilung zu begründen, stellen wir die Gleichung als Summe von Quadraten dar. Im Falle I wird die Gleichung hierdurch

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 = 0.$$

Hier haben entweder alle drei Koefficienten dasselbe Vorzeichen oder einer hat ein anderes Vorzeichen als die beiden andern. Da wir aber auch den Einheitspunkt willkürlich wählen können, so brauchen wir nur die Fälle zu unterscheiden:

$$\text{A)}\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$
$$\text{B)}\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

6. Die Gleichung: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ wird für keinen reellen Punkt befriedigt. Jede reelle Gerade hat zwei imaginäre Punkte mit der Kurve gemein, und von jedem reellen Punkte gehen zwei imaginäre Tangenten aus. Wir sagen in diesem Falle, die Kurve sei imaginär. Ein reeller Punkt hat auch eine reelle Polare und jede reelle Gerade einen reellen Pol; aber kein Pol liegt in seiner Polare.

7. Dagegen stellt die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$$

eine reelle Kurve dar, weil man dem Verhältnis $x_2 : x_3$ jeden Wert geben kann, der kleiner als eins ist, und dazu zwei entgegengesetzt gleiche Werte von $x_1 : x_3$ findet.

Jede Gerade, welche durch den Punkt (0, 0, 1) geht, schneidet

die Kurve. Setzt man nämlich für x_1 den Wert $x_1 = kx_2$ in die Gleichung (IB) ein, so wird die Gleichung

$$(k^2 + 1)\, x_2^2 = x_3^2,$$

woraus sich bei jedem Werte von k zwei reelle Werte für das Verhältnis $x_2 : x_3$ ergeben.

Man kann auch den Punkt (0, 0, 1) mit einem Punkte $(y_1, y_2, 0)$ der Geraden $x_3 = 0$ verbinden; dann hat ein beliebiger Punkt der Verbindungslinie die Koordinaten y_1, y_2, ω. Setzt man diese Werte in IB) ein, so ergiebt sich zur Bestimmung von ω die Gleichung:

$$y_1^2 + y_2^2 = \omega^2,$$

deren Wurzeln stets reell sind.

Dagegen gehen durch den Punkt (1, 0, 0) sowohl schneidende als nichtschneidende Gerade hindurch. Setzt man $x_3 = kx_2$ in die Gleichung der Kurve ein, so erhält man die Gleichung:

$$x_1^2 + (1 - k^2)\, x_2^2 = 0;$$

diese liefert für $k = \pm 1$ gleiche, für $k^2 < 1$ imaginäre und für $k^2 > 1$ reelle Wurzeln.

Wir haben hier zwei Punkte gefunden, welche der Kurve gegenüber ganz verschiedene Lage haben: durch den einen Punkt gehen nur schneidende Linien, durch den andern auch nichtschneidende und Tangenten. Von den Punkten der einen Art können wir zu denen der andern Art nur dadurch gelangen, dafs wir durch die Kurve selbst hindurchgehen. Daher zerfällt die Ebene der Kurve gegenüber in zwei Teile, das Innere und das Äufsere der Kurve: durch einen Punkt des Innern gehen nur schneidende, durch einen Punkt des Äufsern auch nichtschneidende und berührende Gerade.

8. Wir wollen dies direkt nachweisen. Ein Punkt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) sei so gewählt, dafs

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 < 0$$

ist. Diesen Punkt verbinde man mit einem Punkte $(\eta_1, \eta_2, 0)$ der Linie $x_3 = 0$ durch eine Gerade. Damit ein Punkt

$$(\xi_1 + \omega\eta_1,\ \xi_2 + \omega\eta_2,\ \xi_3)$$

dieser Geraden auf der Kurve liegt, mufs ω der Gleichung

$$(\xi_1 + \omega\eta_1)^2 + (\xi_2 + \omega\eta_2)^2 - \xi_3^2 = 0$$

oder der Gleichung:

$$\omega^2 (\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2\omega\, (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) + (\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2) = 0$$

genügen. Diese hat aber zwei reelle Wurzeln, weil der Koefficient von ω^2 positiv, das absolute Glied aber negativ ist.

9. Die Geraden der Ebene zerfallen der Kurve gegenüber in drei Gruppen, in schneidende, nichtschneidende und Tangenten. Die nichtschneidenden Geraden gehören ganz dem Äufsern an; die Tangenten haben einen Punkt mit der Kurve gemeinschaftlich, während alle ihre übrigen Punkte im Äufsern liegen; die schneidenden Geraden liegen zum Teil im Innern und zum andern Teil im Äufsern.

Von den drei Eckpunkten eines Polardreiecks liegen jedesmal zwei im Äufsern und einer im Innern der Kurve; zwei seiner Seiten schneiden die Kurve, die dritte liegt in ihrem Äufsern.

10. Jedes Geradenpaar kann als Summe zweier Quadrate dargestellt werden. Wir haben zu unterscheiden, ob diese Quadrate dasselbe oder verschiedenes Vorzeichen haben. Demnach erhalten wir die beiden Arten:

$$\text{II A)}\quad x_1^2 + x_2^2 = 0.$$
$$\text{B)}\quad x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Im Falle A) ist der singuläre Punkt (0, 0, 1) der einzige reelle Punkt der Kurve; die Geraden selbst sind imaginär. Im Falle B) besteht die Linie aus den beiden reellen Geraden:

$$x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_1 - x_2 = 0.$$

11. Hiernach können wir die Kurven zweiter Ordnung in folgender Weise einteilen:

I. Der eigentliche Kegelschnitt.
   A) Der imaginäre Kegelschnitt.
   B) Der reelle Kegelschnitt.

II. Das Geradenpaar.
   A) Paar von imaginären Geraden.
   B) Paar von reellen Geraden.

III. Die Doppelgerade.

Übungen:

1) Zu welcher der angegebenen fünf Arten gehören folgende Kurven:

a) $6x_1^2 + 10x_1x_2 + 6x_2^2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3 + 3x_3^2 = 0.$

b) $4x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_1x_3 - x_3^2 = 0.$

c) $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2 = 0.$

d) $3x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$.
e) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2 = 0$.
f) $3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$.
g) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$.
h) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.
i) $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3 + x_3^2 = 0$.
k) $x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_3 - 10x_2x_3 + 9x_3^2 = 0$.
l) $3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 8x_1x_3 + 4x_3^2 = 0$.
m) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3 + 9x_3^2 = 0$.

2) Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs die Gleichung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ mit der Determinante A einen imaginären Kegelschnitt darstellt, kommen darauf hinaus, dafs das Produkt $a_{11} . A$ und der Ausdruck $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ einen positiven, nicht verschwindenden Wert haben.

3) Wenn zwei der drei Koefficienten a_{11}, a_{22}, a_{33} ungleiches Vorzeichen haben, so stellt die Gleichung entweder eine Kurve der Art I B) oder II B) dar.

4) Welche Willkür besteht in der Wahl der neuen Koordinaten, falls in ihnen nur die Quadrate der Veränderlichen vorkommen sollen? Zeigt sich in dieser Hinsicht ein Unterschied, falls die Kurve zweiter Ordnung eine eigentliche Kurve, ein Linienpaar oder eine Doppelgerade ist?

5) Wenn die Determinante verschwindet, so haben die Gröfsen $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $a_{11}a_{33} - a_{13}^2$, $a_{22}a_{33} - a_{23}^2$, soweit sie nicht null sind, dasselbe Vorzeichen, und zwar das positive oder negative, jenachdem das Linienpaar imaginär oder reell ist.

6) Für die in 1) angegebenen eigentlichen Kurven suche man Polardreiecke,

a) solche, bei denen ein Eckpunkt mit einem der Punkte (1, 0, 0) oder (0, 1, 0) oder (0, 0, 1),

b) solche, bei denen eine Seite mit einer der gegebenen Koordinatenseiten zusammenfällt.

7) Wie drückt sich bei den in 1) enthaltenen eigentlichen reellen Kurven die Bedingung für einen Innenpunkt aus?

§ 19.

Die Kurven zweiter Ordnung und die unendlichferne Gerade.

1. Bei unsern bisherigen Untersuchungen haben wir die unendlichferne Gerade in gleicher Weise wie die übrigen geraden Linien behandelt. In Wirklichkeit hat aber die unendlichferne Gerade nur uneigentliche Punkte. Wir müssen daher, wenn wir eine Kurve allseitig charakterisieren wollen, ihre Lage zur unendlichfernen Geraden in Betracht ziehen.

Um diese Gerade auch äufserlich zu bevorzugen, wählen wir sie zu der einen Seite des Koordinatendreiecks; wir ersetzen also nach § 11, 3 unsere allgemeinen durch Cartesische Koordinaten, die im allgemeinen schiefwinklig sein werden. Da aber hierbei über den Einheitspunkt in bestimmter Weise verfügt wird, können wir nicht mehr, wie wir im letzten Paragraphen gethan haben, die Koefficienten sämtlich $= \pm 1$ setzen.

2. Da ein eigentlicher imaginärer Kegelschnitt (I A) mit jeder Geraden zwei imaginäre Punkte gemein hat, kann die Lage zur unendlichfernen Geraden keine weitere Einteilung dieser Kurven begründen. Der Darstellung legen wir ein Polardreieck zu Grunde, von dem eine Seite ins Unendlichferne fällt; das entsprechende Cartesische Koordinatensystem hat den Mittelpunkt zum Anfangspunkte und zwei konjugierte Durchmesser zu Axen. In ihnen lautet die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

3. Einem reellen eigentlichen Kegelschnitte gegenüber zerfallen die Geraden der Ebene in drei Gruppen: entweder liegen sie ganz im Äufsern der Kurve, oder sie berühren oder sie schneiden dieselbe. Dadurch werden wir auf drei Arten von eigentlichen Kegelschnitten geführt:

a) Ellipsen, welche von der unendlichfernen Geraden nicht geschnitten werden,

b) Parabeln, welche von der unendlichfernen Geraden berührt werden,

c) Hyperbeln, welche zwei unendlichferne Punkte besitzen.

4. Da die unendlichferne Gerade ganz im Äufsern der Ellipse liegt, so lassen sich von jedem ihrer Punkte aus zwei Tangenten

an die Kurve ziehen; es giebt also zu jeder Richtung zwei parallele Tangenten. Als Pol einer aufserhalb der Kurve gelegenen Geraden liegt der Mittelpunkt im Innern; somit schneidet jeder Durchmesser in zwei getrennten Punkten. Wollen wir von der Gleichung (B) zu Cartesischen Koordinaten übergehen, so müssen wir die aufserhalb der Kurve liegende Dreiecksseite zur unendlichfernen Geraden nehmen; daher ist die Gleichung der Ellipse, bezogen auf ein Paar konjugierter Durchmesser:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

5. Die Parabel wird von der unendlichfernen Geraden berührt. Alle (eigentlichen) nach dem unendlichfernen Punkte gezogenen Geraden treffen die Kurve noch in einem eigentlichen Punkte. Es giebt also eine Richtung von der Art, dafs alle zu ihr parallelen Geraden nur in einem einzigen Punkte schneiden. Weil diese Linien durch den Pol der unendlichfernen Geraden gehen, werden sie Durchmesser genannt. Der Pol eines Durchmessers ist der unendlichferne Punkt der in seinem Schnittpunkte an die Kurve gelegten Tangente; alle zu dieser Tangente parallelen Sehnen werden durch den Durchmesser halbiert.

Von jedem Punkte der unendlichfernen Geraden, der von ihrem Berührungspunkte verschieden ist, läfst sich noch eine zweite Tangente an die Kurve legen; daher giebt es zu jeder Richtung, welche von der Durchmesserrichtung verschieden ist, eine, und zwar eine einzige parallele Tangente an die Parabel.

Um in Cartesischen Koordinaten die einfachste Form der Gleichung zu erhalten, schreiben wir die Gleichung (B) in der Form:

$$x_1^2 = (x_3 - x_2)(x_3 + x_2),$$

setzen $x_1 = y_1$, $x_3 + x_2 = 2y_2$, $x_3 - x_2 = y_3$, wodurch wir zu der Gleichung geführt werden:

$$y_1^2 = 2y_2y_3.$$

Hier dürfen wir die Tangente $y_3 = 0$ zur unendlichfernen Geraden nehmen; dann erhalten wir in Cartesischen Koordinaten die Gleichung der Parabel in der Form:

$$y^2 = 2ax.$$

6. Die Hyperbel wird von der unendlichfernen Geraden geschnitten; die in ihren unendlichfernen Punkten an die Kurve

gelegten Tangenten (Asymptoten) schneiden sich im Mittelpunkte. Jede Parallele zu einer Asymptote schneidet die Kurve auch in einem eigentlichen Punkte.

Der Mittelpunkt liegt im Äufsern der Hyperbel; von den beiden durch ihn gehenden Seiten eines Polardreiecks schneidet die eine, während die andere ganz im Äufsern der Kurve liegt; somit schneidet jedesmal nur der eine von zwei konjugierten Durchmessern.

Die Gleichung auf konjugierte Durchmesser bezogen ist:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

7. Für das imaginäre Linienpaar haben wir zu unterscheiden, ob der singuläre Punkt ein eigentlicher Punkt ist oder unendlichfern liegt. Wollen wir im ersten Falle die Kurve auf ein Cartesisches Koordinatensystem beziehen, so wählen wir zwei konjugierte Polare zu Axen; die Gleichung wird also:

$$\text{II A) a):} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Diese Gleichung stellt zwei einander schneidende imaginäre Gerade dar.

Wenn aber der singuläre Punkt unendlich fern liegt, so wählen wir die zur unendlichfernen Geraden konjugierte Polare als eine Koordinatenaxe; wir lassen mit andern Worten in der Gleichung II A) die Gerade $x_2 = 0$ mit der unendlichfernen Geraden zusammenfallen; die Gleichung wird also:

$$\text{II A) b):} \quad x^2 + a^2 = 0.$$

Die Kurve besteht aus zwei imaginären parallelen Geraden.

8. Die reellen Linienpaare II B) zerfallen in drei Arten:

a) die Geraden des Paares schneiden sich in einem eigentlichen Punkte,

b) das Paar besteht aus zwei eigentlichen parallelen Geraden,

c) die eine der beiden Geraden ist die unendlichferne Gerade.

Die Gleichung wird im Falle II B) a):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

im Falle II B) b):

$$x^2 = a^2;$$

der Fall II B) c) kann durch Cartesische Koordinaten nicht dar-

gestellt werden; indem wir aber unter $x = 0$ eine eigentliche und unter $p = 0$ die unendlichferne Gerade verstehen, dürfen wir der Gleichung die Form geben:

$$xp = 0.$$

9. Für die Doppelgerade haben wir nur zu unterscheiden, ob sie eine eigentliche oder die unendlichferne Gerade ist.

10. Demnach erhalten wir folgende Einteilung der Kurven zweiter Ordnung:

I A) Der imaginäre eigentliche Kegelschnitt,
I B) a) Ellipse,
b) Parabel,
c) Hyperbel.
II A) a) Paar von schneidenden imaginären Geraden,
b) Paar von parallelen imaginären Geraden,
II B) a) Paar von schneidenden reellen Geraden,
b) Paar von parallelen reellen Geraden,
c) Verbindung der unendlichfernen mit einer eigentlichen Geraden.
III a) Eine eigentliche Gerade,
b) die unendlichferne Gerade.

Übungen:

1) Welche unter den elf verschiedenen Arten von Kurven zweiter Ordnung haben unendlichviele, zwei, einen, keinen Punkt im Unendlichfernen?

2) Wenn $x_3 = 0$ die unendlichferne Gerade ist, wie lautet die Bedingung, dafs die Kurve $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ unendlichviele, zwei, einen oder keinen unendlichfernen Punkt besitzt?.

3) Indem man wieder die Gerade (0, 0, 1) mit der unendlichfernen Geraden zusammenfallen läfst, soll für die in § 18, Üb. 1) angegebenen Kurven angegeben werden, zu welcher Art sie gehören.

4) Wann stellt unter derselben Annahme die Gleichung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ eine Hyperbel, eine Parabel, eine Ellipse oder einen imaginären Kegelschnitt dar?

(In allen diesen Fällen mufs die Determinante von null verschieden sein; für eine Hyperbel ist $a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ negativ, für eine Parabel gleich null, für die beiden andern Kurven positiv;

bei einer Ellipse ist aufserdem $a_{11}A$ negativ, bei einer imaginären Kurve positiv.)

5) Wenn von einer Parabel ein Durchmesser, die Tangente in ihrem Endpunkte und ein weiterer Punkt gegeben sind, so soll man in diesem Punkte die Tangente an die Kurve legen.

6) Die Polare zu einem Punkte, der auf einer Asymptote einer Hyperbel liegt, ist zu dieser Geraden parallel.

7) Auf jeder Parallelen zu einer Asymptote einer Hyperbel wird die Strecke zwischen einem ihrer Punkte und seiner Polaren durch den Schnittpunkt mit der Kurve halbiert; mit andern Worten: Zieht man durch einen Punkt die Parallele zu einer Asymptote einer Hyperbel, so liegt der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kurve mitten zwischen dem gegebenen Punkte und seinem in dieser Geraden enthaltenen konjugierten Pole.

8) Wie lautet der vorstehende Satz für eine Parabel?

9) Eine Sehne, welche durch einen Punkt parallel zu der Polare desselben gezogen ist, wird in ihm halbiert.

10) Jede Strecke, welche zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Tangenten liegt und zur Berührungssehne parallel ist, wird von dem nach diesem Punkte führenden Durchmesser halbiert.

§ 20.

Die Kurven zweiter Klasse.

1. Wir untersuchen diejenige Kurve, welche von allen Geraden berührt wird, deren Koordinaten (u_1, u_2, u_3) der Gleichung genügen:

$$(1)\quad A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 + A_{33}u_3^2 + 2A_{12}u_1u_2 + 2A_{13}u_1u_3 + 2A_{23}u_2u_3 = 0.$$

Indem wir wieder annehmen, dafs

$$A_{12} = A_{21},\quad A_{13} = A_{31},\quad A_{23} = A_{32}$$

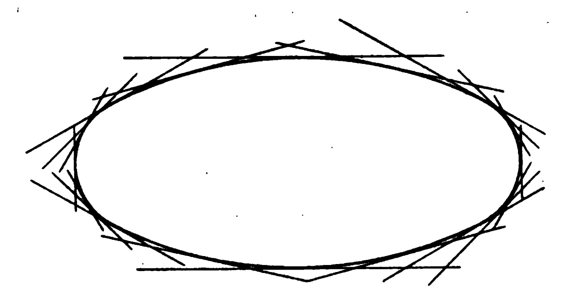
ist, können wir die Gleichung (1) auch in der Form schreiben:

$$(2)\quad \Sigma A_{\iota\varkappa}\, u_\iota\, u_\varkappa = 0 \qquad (\iota, \varkappa = 1, 2, 3).$$

Jede Kurve, deren Tangenten einer solchen Gleichung genügen, nennen wir eine *Kurve zweiter Klasse.*

Die Gleichung (1) kann noch in anderer Weise gedeutet werden. Man nehme an, eine gerade Linie (u) bewege sich so,

dafs ihre Koordinaten in jeder Lage der Gleichung (1) genügen; dabei möge ein Teil der Ebene mit Geraden (u) angefüllt werden, der andere Teil aber nicht; die gemeinsame Grenze beider Teile



gegen einander bildet die Kurve, an welche alle Geraden (u) Tangenten sind; wir sagen, diese Kurve werde durch die Gleichung (1) in Linienkoordinaten dargestellt.

2. Soll die Gerade (u') eine Tangente der Kurve sein, so mufs die Gleichung bestehen:

$$A_{11}u_1'^2 + A_{22}u_2'^2 + A_{33}u_3'^2 + 2A_{12}u_1'u_2' + 2A_{13}u_1'u_3' + 2A_{23}u_2'u_3' = 0.$$

Wenn hier die Koordinaten u_1', u_2', u_3' bekannt sind, so stellt die vorstehende Gleichung eine homogene lineare Beziehung zwischen den sechs Koefficienten $A_{11} \ldots . A_{23}$ dar. Durch fünf solche Beziehungen sind uns die Verhältnisse dieser Koefficienten gegeben. Demnach können wir, indem wir von ganz speciellen Lagen absehen, den Satz aussprechen:

Eine Kurve zweiter Klasse ist durch fünf Tangenten eindeutig bestimmt.

3. Gehen wir zu einem andern homogenen Koordinatensysteme (v_1, v_2, v_3) über, so müssen wir die ursprünglichen Koordinaten u_1, u_2, u_3 durch homogene lineare Ausdrücke in v_1, v_2, v_3 ersetzen. Demnach ist auch die Gleichung in den neuen Koordinaten homogen vom zweiten Grade; sie hat die Form:

$$(3) \quad \Sigma B_{\iota\varkappa} v_\iota v_\varkappa = 0.$$

4. Um diejenigen Tangenten zu bestimmen, welche durch den Punkt $v_3 = 0$ hindurchgehen, haben wir in der Gleichung (3) $v_3 = 0$ zu setzen. Dann ergiebt sich das Verhältnis $v_1 : v_2$ aus der Gleichung:

$$B_{11}v_1^2 + 2B_{12}v_1v_2 + B_{22}v_2^2 = 0.$$

Für dies Verhältnis erhalten wir also zwei (reelle oder imaginäre oder zusammenfallende) Werte. Da wir aber den Punkt $v_3 = 0$ ganz willkürlich in der Ebene wählen können, so gilt das gefundene Ergebnis für alle Punkte der Ebene. Durch jeden Punkt der Ebene gehen im allgemeinen zwei Tangenten der Kurve.

5. Zu diesem Satze gelangen wir auch auf folgendem Wege. Es seien (u') und (u'') zwei beliebige Gerade der Ebene; dann hat jede dritte Gerade, welche durch den Schnittpunkt der beiden ersten hindurchgeht, Koordinaten, welche den Gröfsen

$$(4) \quad u_1' + \omega u_1'', \; u_2' + \omega u_2'', \; u_3' + \omega u_3''$$

proportional sind. Soll diese neue Gerade eine Tangente an die Kurve sein, so mufs die Gleichung (1) erfüllt werden, wenn man in ihr die Koordinaten u_1, u_2, u_3 der Reihe nach durch die Werte (4) ersetzt. Dadurch erhalten wir zur Bestimmung der Gröfse ω eine Gleichung zweiten Grades:

$$\omega^2 \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' u_\varkappa'' + \omega \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' + \omega \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' u_\varkappa' + \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa' = 0.$$

Nun ist $\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' = \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' u_\varkappa'$; also können wir die vorstehende Gleichung auch in der Form schreiben:

$$(5) \quad \omega^2 \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' u_\varkappa'' + 2\omega \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' + \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa' = 0.$$

Da diese Gleichung vom zweiten Grade ist, können durch den Schnittpunkt im allgemeinen zwei Tangenten gelegt werden.

Die soeben aufgestellte Definition der Kurven zweiter Klasse stimmt also mit der oben (§ 14, 10) gegebenen überein.

6. Wenn ω_1 und ω_2 die Wurzeln der Gleichung (5) sind, so stellt der Quotient $\omega_1 : \omega_2$ das Doppelverhältnis der beiden gegebenen Geraden (u') und (u'') zu den durch ihren Schnittpunkt gehenden Tangenten dar. Wir sagen, zwei gerade Linien seien **konjugierte Polare** einer Kurve zweiter Klasse, wenn sie harmonisch liegen zu den beiden von ihrem Schnittpunkte ausgehenden Tangenten an die Kurve. Sollen die Geraden (u') und (u'') konjugierte Polare sein, so müssen die Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung (5) der Bedingung genügen:

$$\omega_1 : \omega_2 = -1 \quad \text{oder} \quad \omega_1 + \omega_2 = 0.$$

Nun ist $\omega_1 + \omega_2 = -\dfrac{2 \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa''}{\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' u_\varkappa''}$.

Damit also die Geraden (u') und (u'') konjugierte Polare von einander in Bezug auf die Kurve (1) sind, mufs die Gleichung erfüllt sein:

$$(6)\quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' = 0.$$

7. Zu der gegebenen Geraden (u') sind diejenigen Geraden (u) konjugierte Polaren, welche der Gleichung genügen:

$$(7)\quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa = 0.$$

Diese Gleichung, welche auch in der Form geschrieben werden kann:

$$(8)\quad u_1 \Sigma A_{1\varkappa} u_\varkappa' + u_2 \Sigma A_{2\varkappa} u_\varkappa' + u_3 \Sigma A_{3\varkappa} u_\varkappa' = 0,$$

ist homogen linear in den veränderlichen Koordinaten u_1, u_2, u_3; sie stellt daher, wenn die Koefficienten von u_1, u_2, u_3 nicht sämtlich verschwinden, einen Punkt dar. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Die Polaren zu einer festen Geraden in Bezug auf eine Kurve zweiter Klasse gehen durch einen festen Punkt, den Pol der gegebenen Geraden.

Wir unterscheiden hier den Pol einer gegebenen Geraden in Bezug auf eine Kurve zweiter Klasse vom Pol einer Geraden in Bezug auf eine Kurve zweiter Ordnung: im ersten Falle ist der Pol der Ort aller zur gegebenen Geraden konjugierten Polaren; im zweiten Falle ist die Polare der Ort aller zum gegebenen Punkte konjugierten Pole. Wir werden später nachweisen, dafs jedesmal, wenn die Kurve zugleich von der zweiten Ordnung und der zweiten Klasse ist, auch Pol und Polare in gleicher Weise zusammengehören.

8. Die Bedingung dafür, dafs die drei Koefficienten von u_1, u_2, u_3 in der Gleichung (8) für keinen Wert (u') verschwinden, besteht darin, dafs die Determinante

$$(9)\quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist. Wir wollen diese Voraussetzung den zunächst folgenden Untersuchungen zu Grunde legen und sagen, in diesem Falle werde durch die Gleichung (1) eine eigentliche Kurve zweiter Klasse dargestellt.

9. Soll der Punkt

$$y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 = 0$$

der Pol der Geraden (u') in Bezug auf die Kurve (1) sein, so müssen, wie der Vergleich mit (8) zeigt, die Gleichungen bestehen:

$$A_{11}u_1' + A_{12}u_2' + A_{13}u_3' = \varrho y_1$$
$$A_{21}u_1' + A_{22}u_2' + A_{23}u_3' = \varrho y_2$$
$$A_{31}u_1' + A_{32}u_2' + A_{33}u_3' = \varrho y_3.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich, nachdem y_1, y_2, y_3 und ϱ beliebig gewählt sind, die Gröfsen u_1', u_2', u_3' eindeutig bestimmen, wofern die Determinante (9) von null verschieden ist. Die Verbindung von 7. mit diesem Ergebnisse führt zu dem Satze:

In Bezug auf eine eigentliche Kurve zweiter Klasse gehört zu jeder Geraden der Ebene ein einziger Pol und zu jedem Punkte der Ebene eine einzige Polare.

10. Wie für die Kurven zweiter Ordnung gelten auch hier die Sätze:

Dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich der Pol auf einer Geraden, der Polare des Punktes.

Wenn vier Gerade einem Büschel angehören, so liegen ihre Pole in gerader Linie; das Doppelverhältnis der Geraden ist gleich dem ihrer Pole.

11. Für eine eigentliche Kurve zweiter Klasse giebt es keine zwei verschiedene Gerade (u') und (u''), deren Koordinaten den drei Gleichungen genügen:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' = 0, \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' = 0, \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' u_\varkappa'' = 0.$$

Denn aus diesen drei Gleichungen folgt die weitere Gleichung:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} (u_\iota' + \mu u_\varkappa'')\ (u_\varkappa' + \nu u_\varkappa'') = 0,$$

welche aussagt, dafs bei beliebigen Werten von μ und ν jede Gerade $(u' + \mu u'')$ zu jeder Geraden $(u' + \nu u'')$ konjugierte Polare ist; daher kann in diesem Falle der Schnittpunkt der Geraden (u') und (u'') nicht eine einzige Polare besitzen, sondern mufs alle Geraden $(u' + \mu u'')$ zu Polaren haben. Da aber in Bezug aut eine eigentliche Kurve zweiter Klasse jeder Pol eine einzige Polare besitzt, so gilt der Satz:

Eine eigentliche Kurve zweiter Klasse kann nicht von allen Geraden berührt werden, welche durch einen festen Punkt gehen.

12. Wenn die Gerade (u') eine Tangente der Kurve (1) ist, wenn also die Gleichung besteht:

$$(10) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa' = 0,$$

so kann man die Gerade (u'') so wählen, dafs die Gleichung befriedigt wird:

$$(11) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' = 0.$$

Jetzt kann die Gleichung (5), da der Koefficient von ω^2 für eine eigentliche Kurve nicht verschwinden kann, nur bestehen, wenn $\omega = 0$ ist. Durch den Schnittpunkt der Geraden (u') und (u'') geht nur eine einzige Tangente, nämlich die Gerade (u'); dieser Punkt gehört der Kurve an, er ist der Berührungspunkt der Tangente (u'). Demnach stellt die Gleichung (11) die Bedingung dafür dar, dafs die Gerade (u'') durch den Berührungspunkt der Tangente (u') geht, oder der Pol einer Tangente ist mit ihrem Berührungspunkte identisch.

13. Hiernach kann man die in § 14, 4 und 5 angestellte Betrachtung auf die Kurven zweiter Klasse übertragen. Es seien a und b die beiden von einem Punkte π ausgehenden Tangenten an eine eigentliche Kurve zweiter Klasse; α sei der Berührungspunkt von a, β der von b. Jede Gerade durch α ist konjugierte Polare zu a, und jede Gerade durch β konjugierte Polare zu b. Daher sind die Geraden a und b Polaren zu der Geraden $\alpha\beta$, oder der Punkt π ist Pol der Geraden $\alpha\beta$.

Wenn umgekehrt eine beliebige Gerade p mit der Kurve einen Punkt α gemein hat, so ist die in α an die Kurve gelegte Tangente a Polare zu p; sie mufs also durch den Pol π der Geraden p gehen.

Durch den Punkt π gehen also diejenigen Geraden, von denen die Kurve in ihren Schnittpunkten mit p berührt wird. Da aber von π nur zwei Tangenten der Kurve ausgehen, so hat auch die Gerade p nur zwei Punkte mit der Kurve gemeinschaftlich. Daraus folgt der Satz:

Eine eigentliche Kurve zweiter Klasse ist auch von der zweiten Ordnung.

Die vorstehende Betrachtung ist unabhängig davon, ob die Schnittpunkte der Geraden p mit der Kurve reell oder imaginär sind. Demnach entspricht für eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse einem jeden Punkte als Pol dieselbe

Gerade als Polare und einer jeden Geraden als Polare derselbe Punkt als Pol, mag man die Kurve als eine von der zweiten Ordnung oder von derselben Klasse auffassen.

14. Wenn die Gerade (u') Tangente an die Kurve (1) ist, ihre Koordinaten also der Gleichung (10) genügen, so stellt die Gleichung (7) ihren Berührungspunkt dar. Die Koordinaten x_1, x_2, x_3 dieses Punktes sind den Koefficienten von u_1, u_2, u_3 in (7) proportional. Daher mufs sein:

$$(12)\quad \begin{aligned} A_{11}u_1' + A_{12}u_2' + A_{13}u_3' &= \varrho x_1 \\ A_{21}u_1' + A_{22}u_2' + A_{23}u_3' &= \varrho x_2 \\ A_{31}u_1' + A_{32}u_2' + A_{33}u_3' &= \varrho x_3. \end{aligned}$$

Weil wir die Determinante (9) als von null verschieden voraussetzen, können wir aus diesen Gleichungen u_1', u_2', u_3' berechnen, sobald wir ϱ, x_1, x_2, x_3 gegeben denken. Indem wir die Determinante (9) mit α und die zu $A_{\iota\varkappa}$ gehörende Unterdeterminante mit $\alpha_{\iota\varkappa}$ bezeichnen, folgt aus (12):

$$(13)\quad \begin{aligned} \alpha u_1' &= \varrho(x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{21} + x_3\alpha_{31}) \\ \alpha u_2' &= \varrho(x_1\alpha_{12} + x_2\alpha_{22} + x_3\alpha_{32}) \\ \alpha u_3' &= \varrho(x_1\alpha_{13} + x_2\alpha_{23} + x_3\alpha_{33}). \end{aligned}$$

Der Punkt (x) mufs aber in der Tangente (u') liegen; daher mufs die Gleichung bestehen:

$$(14)\quad x_1u_1' + x_2u_2' + x_3u_3' = 0.$$

Indem wir in diese Gleichung die Werte (13) einsetzen, wird die Gleichung der Kurve in Punktkoordinaten:

$$(15)\quad \Sigma\alpha_{\iota\varkappa}x_\iota x_\varkappa = 0.$$

Wir können aber auch die Gleichungen (12) und (14) als vier homogene lineare Gleichungen in den Gröfsen u_1', u_2', u_3', $-\varrho$ auffassen. Damit diese mit einander bestehen, mufs die Bedingung erfüllt sein:

$$(16)\quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & x_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & x_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Jede der beiden Gleichungen (15) und (16), die sich nur durch die äufsere Form unterscheiden, stellt die Bedingung dar, welcher die Koordinaten (x_1, x_2, x_3) eines Punktes genügen müssen, damit derselbe der durch die Gleichung (1) dargestellten Kurve angehört.

15. Auf die Theorie der Polardreiecke wollen wir nicht nochmals eingehen; wir möchten aber wenigstens darauf hinweisen, wie leicht sich manche Sätze über konjugierte Durchmesser aus der Theorie der konjugierten Polaren ergeben. Es wird genügen, diese Sätze in einer Form auszusprechen, bei welcher diese Beziehung besonders deutlich hervortritt.

Die Berührungspunkte zweier Tangenten, welche einem Durchmesser parallel sind, liegen auf dem konjugierten Durchmesser.

Zwei einander schneidende Tangenten liegen harmonisch zu dem nach ihrem Schnittpunkte gezogenen Durchmesser und derjenigen durch den Schnittpunkt gelegten Geraden, welche zu dem konjugierten Durchmesser parallel ist.

Die Polare eines Punktes ist demjenigen Durchmesser parallel, welcher zu dem hindurchgehenden Durchmesser konjugiert ist.

Übungen:

1) a) Wenn die Determinante aus den Koefficienten der Gleichung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ nicht verschwindet, und wenn $A_{\iota\varkappa}$ den Koefficienten von $a_{\iota\varkappa}$ in dieser Determinante darstellt, so ist auch die Determinante aus den Koefficienten der Gleichung $\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$ von null verschieden. Man soll diesen Satz einmal aus den Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung erschliefsen und dann direkt mit Hilfe der Determinanten beweisen.

b) Man stelle die Gleichung der Kurve $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ in Linienkoordinaten dar und gehe von der neuen Gleichung wieder zu Punktkoordinaten zurück. Wie läfst sich beweisen, dafs man jetzt die ursprüngliche Gleichung wieder erhält?

2) Je zwei Seiten eines Polardreiecks sind konjugierte Polare in Bezug auf die Kurve.

3) a) Die Diagonalen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Vierseits bilden ein Polardreieck desselben.

b) Die Diagonalen eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser der Kurve.

4) a) Einem Dreieck sei ein Kegelschnitt einbeschrieben; man konstruiere auf jeder Seite zu den Eckpunkten und dem Berührungspunkte den vierten harmonischen Punkt und untersuche die Lage der drei so erhaltenen Punkte.

b) Man weise nach, dafs die Verbindungslinien je eines

Eckpunktes mit dem Berührungspunkte der Gegenseite durch einen Punkt gehen.

5) a) Die in Bezug auf ein gegebenes Dreieck den Punkten einer Geraden zugeordneten Harmonikalen umhüllen einen Kegelschnitt, der dem Dreiecke einbeschrieben ist. Der Berührungspunkt einer Seite ist ihrem Schnittpunkte mit der Geraden jedesmal in Bezug auf ihre Endpunkte harmonisch zugeordnet.

b) Welche Gleichung hat dieser Kegelschnitt in Punktkoordinaten, falls man die Seiten des Dreiecks zu Koordinatenaxen und die Gerade zur Einheitsgerade wählt?

c) Wenn die Gerade ins Unendlichferne rückt, so berührt der Kegelschnitt jede Seite in ihrer Mitte; der Mittelpunkt der Kurve fällt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammen.

§ 21.

Einteilung der Kurven zweiter Klasse.

1. Die durch die Gleichung

$$(1) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$$

dargestellte Kurve zweiter Klasse ist auch von der zweiten Ordnung, falls die Determinante

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

von null verschieden ist. Da die Kurve somit eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse ist, brauchen wir auf ihre Theorie nicht nochmals einzugehen.

2. Wenn aber die Determinante (2) verschwindet, ohne daſs ihre sämtlichen Unterdeterminanten den Wert null haben, so giebt es ein Wertsystem τ_1, τ_2, τ_3, welches den drei Gleichungen genügt:

$$(3) \quad \begin{aligned} A_{11}\tau_1 + A_{12}\tau_2 + A_{13}\tau_3 &= 0 \\ A_{21}\tau_1 + A_{22}\tau_2 + A_{23}\tau_3 &= 0 \\ A_{31}\tau_1 + A_{32}\tau_2 + A_{33}\tau_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die verschiedenen Wertsysteme, durch welche diese drei Gleichungen befriedigt werden, unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor; sie stellen also als Linienkoordinaten betrachtet dieselbe Gerade dar. Die Gleichung

$$(4)\quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota \tau_\varkappa = 0$$

wird für alle Wertsysteme u_1, u_2, u_3 befriedigt; die Gerade (τ) ist konjugierte Polare zu allen Geraden der Ebene und heifst aus diesem Grunde die singuläre Gerade der Kurve (1).

Für jede andere Gerade (u') stellt die Gleichung

$$(5)\quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa' = 0$$

einen Punkt dar; alle geraden Linien mit Ausnahme der singulären Geraden haben einen Pol. Zu einer solchen Geraden sind nur diejenigen geraden Linien konjugierte Polare, welche durch den Pol gehen.

Da die Gleichung (5) befriedigt wird, wenn man die Koordinaten u_1, u_2, u_3 durch τ_1, τ_2, τ_3 ersetzt, so liegt der Pol einer jeden Geraden auf der singulären Linie. Der Pol einer beliebigen Geraden ist der Punkt, in welchem irgend eine Polare der Geraden die singuläre Gerade trifft.

3. Sind (u') und (u'') zwei konjugierte Polare der Kurve (1) und (τ) ihre singuläre Gerade, so gelten die Gleichungen:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' u_\varkappa'' = 0,\ \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota' \tau_\varkappa = 0,\ \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota'' \tau_\varkappa = 0,$$
$$\Sigma A_{\iota\varkappa} \tau_\iota \tau_\varkappa = 0.$$

Demnach wird auch die Gleichung befriedigt:

$$\Sigma A_{\iota\varkappa} (u_\iota' + \mu\tau_\iota)(u_\varkappa'' + \nu\tau_\varkappa) = 0.$$

Wenn also die Geraden (u') und (u'') konjugierte Polare der Kurve sind, so sind auch bei beliebigen Werten von μ und ν die Geraden ($u' + \mu\tau$) und ($u'' + \nu\tau$) konjugierte Polare. Wird die singuläre Gerade von der Geraden (u') in μ' und von der Geraden (u'') in μ'' geschnitten, und sind (u') und (u'') konjugierte Polare, so ist auch jede durch μ' gelegte Gerade konjugierte Polare zu jeder durch μ'' gehenden Geraden. Indem wir die beiden Punkte, in denen die singuläre Gerade von zwei konjugierten Polaren geschnitten wird, als konjugierte Pole der Kurve bezeichnen, können wir den Satz aussprechen:

Wenn eine Kurve zweiter Klasse eine singuläre Gerade hat, so lassen sich die Punkte dieser Geraden einander paarweise so als konjugierte Pole zuordnen, dafs jede durch den einen Punkt gehende Gerade konjugierte Polare ist zu jeder geraden Linie, welche durch den andern Punkt gelegt werden kann.

4. Die soeben durchgeführte Betrachtung ändert sich nicht, wenn man die Geraden (u′) und (u″) zusammenfallen läfst, mit andern Worten, wenn man annimmt, dafs die Gerade (u′) eine Tangente der Kurve ist. Dann ist jede andere Gerade, welche durch den Schnittpunkt von (u′) mit der singulären Geraden geht, ebenfalls eine Tangente der Kurve. Da aber durch jeden Punkt der Ebene im allgemeinen zwei Tangente der Kurve gehen, so giebt es auf der singulären Geraden zwei Punkte von der Art, dafs jede durch eine von ihnen gelegte Gerade als Tangente zu betrachten ist. Dies sind aber die einzigen Pole, welche in ihre Polaren hineinfallen, oder die einzigen Punkte der Kurve. Die Gleichung (1) stellt also unter der Annahme, dafs die Determinante (2) den Wert null hat, ein Punktepaar dar.

5. Um der Gleichung unter dieser Voraussetzung die einfachste Gestalt zu geben, nehmen wir die singuläre Gerade zur Seite (0, 0, 1) des Koordinatendreiecks und lassen die beiden andern Seiten konjugierte Polare in Bezug auf die Kurve sein. Dann müssen die Gleichungen (3) für $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 0$, $\tau_3 = 1$ befriedigt sein oder es mufs $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$ sein. Die Geraden (1, 0, 0) und (0, 1, 0) sind aber nur dann konjugierte Polare von einander, wenn $A_{12} = 0$ ist. Daher ist die Gleichung der Kurve:

$$(6)\quad A_{11}u_1^2 + A_{22}u_2^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung, deren linke Seite als Produkt von zwei linearen Ausdrücken dargestellt werden kann, geht unmittelbar hervor, dafs die Kurve aus zwei Punkten besteht. Die weitere Einteilung ist so einfach, dafs sie hier nicht durchgeführt zu werden braucht.

6. Wir betrachten jetzt den Fall, dafs alle Unterdeterminanten zweiten Grades der Determinante (2) verschwinden. Alsdann unterscheiden sich die drei Formen

$$\begin{gathered} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + A_{23}u_3 \\ A_{31}u_1 + A_{32}u_2 + A_{33}u_3 \end{gathered}$$

nur durch einen konstanten Faktor. Wenn also etwa die Koefficienten A_{11}, A_{12}, A_{13} nicht sämtlich gleich null sind, so ist jede Gerade, deren Koordinaten der Gleichung genügen:

$$(7)\quad A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + A_{13}u_3 = 0,$$

eine singuläre Gerade und als solche zu allen Geraden der Ebene konjugiert. Jede andere Gerade (u') hat zum Pol den Punkt

$$u_1' \Sigma A_{1\varkappa} u_\varkappa + u_2' \Sigma A_{2\varkappa} u_\varkappa + u_3' \Sigma A_{3\varkappa} u_\varkappa = 0,$$

also den Punkt (7). Nur dieser Punkt wird durch die Gleichung (1) dargestellt, indem ihre linke Seite bis auf einen konstanten Faktor das Quadrat der linken Seite von (7) ist.

8. Hiernach zerfallen die Kurven zweiter Klasse in folgende Arten:

I. Eigentliche Kurven.

II. Das Punktepaar.

A) Ein Paar imaginärer Punkte;

a) die Verbindungslinie ist eine eigentliche Gerade;

b) die Verbindungslinie ist die unendlichferne Gerade.

B) Die Punkte des Paares sind reell;

a) beide Punkte sind eigentliche Punkte;

b) ein Punkt ist ein eigentlicher, der andere ein unendlichferner Punkt;

c) beide Punkte liegen unendlich fern.

III. Der Doppelpunkt;

a) derselbe ist ein eigentlicher Punkt;

b) er liegt im Unendlichfernen.

Übungen:

1) Welches sind in den mit u_1, u_2, u_3 zusammengehörenden Punktkoordinaten die Koordinaten der Punkte, welche paarweise durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden:

a) $2u_1^2 - 5u_1u_2 - 3u_2^2 + 9u_1u_3 - 13u_2u_3 + 10u_3^2 = 0.$

b) $3u_1^2 + 10u_1u_2 + 7u_2^2 + 4u_1u_3 + 8u_2u_3 + u_3^2 = 0.$

c) $u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$

2) Wenn u_1, u_2, u_3 Hessesche Koordinaten sind, so liegen die Punkte des durch die Gleichung: $\alpha u_1^2 + 2\beta u_1u_2 + \gamma u_2^2 = 0$ dargestellten Paares auf der unendlichfernen Geraden.

3) Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daſs die Gleichung $\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$ ein imaginäres Punktepaar darstellt?

4)[1]

---

[1] Die folgenden Übungen betreffen die ganze in den §§ 12—21 entwickelte Theorie der Kegelschnitte.

a) Wenn die Koefficienten in den Gleichungen der beiden Kegelschnitte

$$(\alpha)\ \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota\, x_\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad (\beta)\ \Sigma \alpha_{\iota\varkappa} u_\iota\, u_\varkappa = 0$$

in der Beziehung stehen:

$$(\gamma)\ \Sigma a_{\iota\varkappa}\, \alpha_{\iota\varkappa} = 0,$$

so haben die Kegelschnitte eine feste geometrische Beziehung zu einander.

(Die Beziehung (γ) ist von der Wahl der Koordinaten unabhängig. Setzt man nämlich: $x_\varkappa = p_{\varkappa 1} y_1 + p_{\varkappa 2} x_2 + p_{\varkappa 3} y_3$, und gehören zu den Punktkoordinaten y_1, y_2, y_3 die Linienkoordinaten v_1, v_2, v_3, so ist: $v_\varkappa = p_{1\varkappa} u_1 + p_{2\varkappa} u_2 + p_{3\varkappa} u_3$. Wenn durch diese Umwandlung die Gleichung (α) übergeht in $\Sigma a'_{\iota\varkappa} y_\iota\, y_\varkappa = 0$ und (β) in $\Sigma \alpha'_{\iota\varkappa} v_\iota\, v_\varkappa = 0$, so ist

$$a'_{\iota\varkappa} = \sum_{\varrho,\,\sigma} a_{\varrho\sigma}\, p_{\varrho\iota}\, p_{\sigma\varkappa} \quad \text{und} \quad \alpha_{\iota\varkappa} = \sum_{\mu,\,\nu} \alpha'_{\mu\nu}\, p_{\iota\mu}\, p_{\varkappa\nu}.$$

Demnach ist

$$\Sigma a_{\iota\varkappa}\, \alpha_{\iota\varkappa} = \sum_{\iota,\varkappa,\mu,\nu} a_{\iota\varkappa}\, \alpha'_{\mu\nu}\, p_{\iota\mu}\, p_{\varkappa\nu} = \sum_{\mu,\,\nu} a_{\mu\nu}\, \alpha'_{\mu\nu}.)$$

b) Wenn die beiden Kegelschnitte (α) und (β) eigentliche Kurven sind und die Beziehung (γ) zwischen den Koefficienten besteht, so liegen auf dem ersten Kegelschnitte die Eckpunkte von unendlichvielen Polardreiecken des zweiten, und der zweite wird von den Seiten unendlichvieler Polardreiecke des ersten berührt.

(Zum Beweise führe man ein neues Koordinatendreieck ein, von dem ein Eckpunkt in einen beliebigen Punkt π der Kurve (α) fällt, und dessen andere Eckpunkte die Punkte sind, in denen die Polare von π in Bezug auf die Kurve (β) die Kurve (a) schneidet. Jetzt wird $a_{11}' = a_{22}' = a_{33}' = 0$, während die Koefficienten a_{12}', a_{13}', a_{23}' sämtlich von null verschieden sein müssen. Zugleich ist $\alpha_{12}' = \alpha_{13}' = 0$; die Relation (γ) verlangt also, dafs $\alpha_{23}' = 0$ ist. Damit ist der erste Teil des Satzes erwiesen; den zweiten Teil beweist man in entsprechender Weise.)

c) Sobald ein Kegelschnitt die Eckpunkte von einem Polardreieck eines zweiten Kegelschnittes enthält, ist er um unendlichviele Polardreiecke des zweiten beschrieben; zugleich sind jetzt unendlichviele Polardreiecke des ersten dem zweiten eingeschrieben.

(Wählt man das gegebene Dreieck zum Koordinatendreieck, so ist $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$; also besteht die Beziehung (γ).)

d) Wenn zwei Kegelschnitte beliebig gegeben sind, so ist der eine im allgemeinen weder einem Polardreiecke des andern umgeschrieben noch eingeschrieben.

e) Durch die Eckpunkte von zwei Polardreiecken eines Kegelschnitts läfst sich ein neuer Kegelschnitt legen.

(λ, μ, ν und λ', μ', ν' seien die Eckpunkte von zwei Polardreiecken des Kegelschnitts (β); der durch λ', μ', ν', λ, μ gelegte Kegelschnitt habe die Gleichung (α). Nach c) mufs die Relation (γ) bestehen. Demnach ist der Kurve (α) ein Polardreieck von (β) eingeschrieben, von dem der Punkt λ ein Eckpunkt ist, oder die Polare von λ in Bezug auf (β) schneidet die Kurve (α) in zwei Punkten, welche mit λ zusammen ein Polardreieck bestimmen. Nun ist $\lambda\mu\nu$ ein solches Dreieck; da es zudem zwei Eckpunkte mit dem eben genannten gemein hat, ist es mit ihm identisch.)

f) Ordnet man sechs Punkte eines Kegelschnitts zu zwei Gruppen von je dreien, so läfst sich ein Kegelschnitt finden, von dem jedes Tripel die Eckpunkte eines Polardreiecks bildet.

g) Die sechs Seiten von zwei Polardreiecken eines Kegelschnitts berühren einen zweiten Kegelschnitt.

h) Irgend sechs Tangenten eines Kegelschnitts bilden bei jeder beliebigen Anordnung die Seiten von zwei Polardreiecken eines zweiten Kegelschnitts.

i) Wenn der Kegelschnitt (α) in ein Geradenpaar zerfällt, so sind die beiden Linien desselben konjugierte Polare zu der Kurve (β), falls zwischen den Koefficienten die Gleichung (γ) besteht.

(Nachdem die Gleichung (α) auf die Form $x_1 x_2 = 0$ gebracht ist, mufs der Koefficient α_{12} verschwinden.)

k) Wenn der Kegelschnitt (β) in ein Punktepaar zerfällt, so giebt die Relation (γ) die Bedingung dafür an, dafs die Punkte des Paares (β) konjugierte Pole zum Kegelschnitt (α) sind.

l) Wenn die Gleichung (α) eine Doppelgerade darstellt und zwischen den Koefficienten der Gleichungen (α) und (β) die Relation (γ) besteht, so ist die Linie eine Tangente der Kurve (β).

(Ist $x_1^2 = 0$ die Gleichung (α), so verlangt die Gleichung (γ), dafs $\alpha_{11} = 0$ ist.)

m) Stellt die Gleichung (β) einen Doppelpunkt dar, so ist die Relation (γ) die Bedingung dafür, dafs dieser Punkt auf der Kurve (α) liegt.

n) Die Forderung, dafs ein gegebener Punkt einem Kegelschnitte angehört, wird durch eine lineare Beziehung zwischen den Koefficienten ausgedrückt; aber diese lineare Gleichung trägt einen ganz speciellen Charakter, während eine lineare Gleichung im allgemeinen die in b) angegebene Eigenschaft darstellt.

5) Gegeben ist ein fester Punkt S, eine feste Gerade g und ein Kegelschnitt K. Auf jedem durch S gehenden Strahle suche man zu S, zum Schnittpunkte mit g und zu jedem Schnittpunkte mit K den vierten harmonischen Punkt, (welcher dem jedesmal ausgewählten Schnittpunkte mit K zugeordnet ist).

a) Welches ist der geometrische Ort dieses Punktes?

b) Wann wird die neue Kurve mit dem gegebenen Kegelschnitte identisch?

6) a) Wenn man jedem Punkte der Ebene seine Polare in Bezug auf einen festen Kegelschnitt zuordnet, so entspricht jedem Punkte eine Gerade, jeder Geraden ein Punkt, m Punkten in gerader Linie m Strahlen eines Punktes u. s. w.

Was entspricht:

α) dem Schnittpunkt zweier Geraden,

β) der Verbindungsgeraden zweier Punkte,

γ) einer Kurve als dem geometrischen Orte eines Punktes,

δ) den sämtlichen Tangenten einer Kurve,

ε) vier harmonischen Punkten einer Geraden,

ζ) den m Schnittpunkten einer Kurve mit einer Geraden,

η) den n von einem Punkte ausgehenden Tangenten an eine Kurve?

b) Eine Gerade bewegt sich so, dafs sie fortwährend einen Kegelschnitt berührt; welche Linie beschreibt ihr Pol in Bezug auf einen zweiten Kegelschnitt, dessen Gleichung

α) in der Form: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$,

β) in der Form: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

vorausgesetzt wird?

c) Indem man umgekehrt einen Punkt die erste Kurve durch-

laufen läfst, fragt es sich, welche Linie seine Polare in Bezug auf die angegebenen Kegelschnitte umhüllt.

d) In einer Figur seien gewisse Eigenschaften, deren Gesamtheit wir mit (B) bezeichnen wollen, eine Folge der für die Figur vorausgesetzten Eigenschaften (A). Jetzt konstruiere man zu der Figur in Bezug auf einen Kegelschnitt die reciproke Figur; den Eigenschaften (A) der ersten Figur mögen in der neuen die Eigenschaften ($\mathfrak{A}$) und den Eigenschaften (B) der ersten die Eigenschaften ($\mathfrak{B}$) in der zweiten entsprechen. Dann darf man umgekehrt von irgend einer Figur mit den Eigenschaften ($\mathfrak{A}$) zu einer Figur mit den Eigenschaften (A) übergehen; da diese auch die Eigenschaften (B) hat, denen die Eigenschaften ($\mathfrak{B}$) entsprechen, so sind auch die Eigenschaften ($\mathfrak{B}$) eine Folge der Eigenschaften ($\mathfrak{A}$). Demnach ermöglicht es die Konstruktion der reciproken Figur, aus gegebenen Sätzen neue Sätze herzuleiten. Man nennt dies Princip das der Reciprocität.

e) Es möge genügen, dasselbe an einem einzigen Beispiele zu erläutern. Wir gehen von dem Satze aus:

Die Diagonalpunkte eines jeden in einen Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecks sind die Eckpunkte eines Polardreiecks der Kurve.

Indem wir zu dieser Figur in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt die reciproke Figur konstruieren, entsprechen den Punkten des gegebenen Kegelschnitts K die Tangenten eines Kegelschnitts C, also dem in K eingeschriebenen Viereck ein der Kurve C umbeschriebenes Vierseit. Da den Diagonalpunkten des ersten die Diagonalen des zweiten zugeordnet sind und irgend zwei konjugierten Polen von K jedesmal konjugierte Polare von C entsprechen, so leitet das angegebene Princip aus dem angegebenen Satze den folgenden her:

Die Diagonalen eines einem Kegelschnitt umbeschriebenen Vierseits bilden ein Polardreieck der Kurve.

§ 22.

Die Involution.

1. Wenn eine Kurve zweiter Ordnung eine Gerade in den Punkten α und β schneidet, so sind je zwei Punkte λ und μ der Geraden, welche zu α und β harmonisch liegen, konjugierte Pole

9*

in Bezug auf die Kurve. Indem man zu jedem Punkte der Geraden den in ihr liegenden konjugierten Pol bestimmt, ordnet man die Punkte dieser Punktreihe einander wechselseitig zu. Ähnliche Zuordnungen von Punkten einer geraden Punktreihe und von Strahlen eines Büschels treten in der Theorie der Kegelschnitte so häufig auf, dafs es notwendig ist, sie eingehend zu untersuchen.

2. Ordnet man jedem Punkte einer Geraden denjenigen ihrer Punkte zu, der zu ihm in Bezug auf ein festes Punktepaar harmonisch liegt, so sagt man, die Punkte seien einander involutorisch zugeordnet oder sie bilden eine Involution.

Um die Bedingung der involutorischen Zuordnung analytisch auszudrücken, legen wir folgende Darstellung zu Grunde. Für zwei beliebige Punkte der Geraden nehmen wir die symbolischen Gleichungen an: $A = 0$, $B = 0$. Es seien dann

$$(1)\quad A + \alpha B = 0,\ A + \beta B = 0$$

die Gleichungen derjenigen Punkte, zu denen jedes Paar der Involution

$$(2)\quad A + \lambda B = 0,\ A + \mu B = 0$$

harmonisch liegen soll. Die Bedingung dafür, dafs die beiden Punkte (2) zu den Punkten (1) harmonisch liegen, haben wir bereits früher (§ 5, 11) in der Form aufgestellt:

$$\frac{\alpha - \lambda}{\lambda - \beta} + \frac{\alpha - \mu}{\mu - \beta} = 0.$$

Aus dieser Gleichung leiten wir durch Fortschaffung der Nenner die Bedingung in folgender Form her:

$$(3)\quad \lambda\mu - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\lambda + \mu) + \alpha\beta = 0.$$

3. Die beiden Punkte, zu denen alle Punktepaare der Involution harmonisch liegen, heifsen die Hauptpunkte der Involution. In der Gleichung (3) treten nur die Summe und das Produkt der Koordinaten der Hauptpunkte auf. Die beiden Gröfsen $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ sind aber auch dann reell, wenn α und β konjugiert komplexe Werte annehmen. Daher ist eine Involution auch reell, wenn ihre Hauptpunkte imaginär sind, wofern nur ihre Koordinaten konjugierte Werte besitzen. Um diese Möglichkeit

von vornherein mit einzuschliefsen, denken wir uns die Gröfsen $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ gegeben und setzen:

$$(4)\quad \alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = b.$$

Dadurch nimmt die Gleichung (3) die neue Gestalt an:

$$(5)\quad \lambda\mu - a(\lambda + \mu) + b = 0.$$

4. Diese Erweiterung der ursprünglichen Definition erweist sich auch nach vielen andern Richtungen hin als wichtig. So können wir jetzt den Satz beweisen:

Eine Involution ist durch zwei ihrer Paare bestimmt.

Sollen die Punktepaare (λ', μ') und (λ'', μ'') der Involution (5) angehören, so mufs sein:

$$(6)\quad \begin{aligned} \lambda'\mu' - a(\lambda' + \mu') + b &= 0 \\ \lambda''\mu'' - a(\lambda'' + \mu'') + b &= 0. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen gestatten, die Werte von a und b zu berechnen und dadurch die Involution zu bestimmen. Man kann aber auch die Gleichung (5) in Verbindung mit den Gleichungen (6) als homogen lineare Gleichungen in den Gröfsen 1, — a, b betrachten. Dann wird die Bedingung, dafs diese drei Gleichungen mit einander vereinbar sind, oder mit andern Worten, dafs die drei Punktepaare (λ, μ), (λ', μ'), (λ'', μ'') einer Involution angehören, durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda + \mu & 1 \\ \lambda'\mu' & \lambda' + \mu' & 1 \\ \lambda''\mu'' & \lambda'' + \mu'' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung kann auf manche andere interessante Form gebracht werden; indessen wollen wir darauf hier nicht eingehen.

5. Aus der gegebenen Herleitung folgt der Satz:

Auf einer Geraden giebt es immer ein (reelles oder imaginäres) Punktepaar, welches zu zwei gegebenen Punktepaaren harmonisch liegt.

Um dasjenige Punktepaar α, β zu finden, welches zu den Paaren (λ', μ') und (λ'', μ'') harmonisch liegt, hat man aus den Gleichungen (6) a und b und dann aus den Gleichungen (4) α und β zu berechnen.

6. Wir fragen uns, ob in einer Involution ein Punkt mit dem ihm entsprechenden zusammenfallen kann, ob mit andern Worten $\lambda = \mu$ sein kann. Um diese Frage zu beantworten, gehen

wir auf die Gleichung (3) zurück. Diese nimmt für $\lambda = \mu$ die Gestalt an:

$$\lambda^2 - (\alpha + \beta)\,\lambda + \alpha\beta = 0$$

und kann nur für $\lambda = \alpha$ oder $\lambda = \beta$ erfüllt werden.

Diejenigen Punkte einer Involution, welche mit ihren entsprechenden Punkten zusammenfallen, sind die Hauptpunkte derselben.

7. Die Involution ist nur ein specieller Fall der projektiven Zuordnung. Nach § 5, 12 sind die Punkte $A + \lambda B = 0$ und $A + \mu B = 0$ desselben Trägers einander projektiv zugeordnet, wenn die Gröfsen λ und μ durch die Gleichung mit einander verbunden sind:

$$\mu = \frac{p\lambda + q}{r\lambda + s} \text{ oder}$$

$$r\lambda\mu + s\mu - p\lambda - q = 0.$$

Damit diese Zuordnung involutorisch wird, mufs $s = -p$ sein oder die letzte Gleichung mufs in λ und μ symmetrisch sein. Die projektive Zuordnung der Punkte eines Trägers geht in die involutorische über, wenn man die Punkte eines jeden Paares mit einander vertauschen kann.

8. Schon hieraus geht der Satz hervor: Irgend vier Punkte einer Punktreihe haben dasselbe Doppelverhältnis wie die ihnen in einer Involution entsprechenden Punkte.

Wenn wir diesen Satz direkt erweisen wollen, nehmen wir an, es seien

$$A + \lambda_1 B = 0,\ A + \lambda_2 B = 0,\ A + \lambda_3 B = 0,\ A + \lambda_4 B = 0$$

vier Punkte der Punktreihe; ihnen mögen der Reihe nach die Punkte entsprechen:

$$A + \mu_1 B = 0,\ A + \mu_2 B = 0,\ A + \mu_3 B = 0,\ A + \mu_4 B = 0.$$

Es müssen dann die Gleichungen bestehen:

$$\lambda_1\mu_1 - a\,(\lambda_1 + \mu_1) + b = 0 \ \ldots\ \lambda_4\mu_4 - a\,(\lambda_4 + \mu_4) + b = 0$$

oder

$$\mu_1 = \frac{a\lambda_1 - b}{\lambda_1 - a} \quad \ldots\ldots \quad \mu_4 = \frac{a\lambda_4 - b}{\lambda_4 - a}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich auf dem früher angegebenen Wege:

$$\frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_4 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_4} = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

9. Wenn wir von der Gleichung (5) ausgehen, so ergeben sich die Hauptpunkte der Involution aus der Gleichung:

$$(8) \quad x^2 - 2ax + b = 0.$$

Diese Gleichung hat entweder zwei verschiedene reelle oder zwei gleiche oder zwei imaginäre Wurzeln, jenachdem der Ausdruck $a^2 - b$ positiv, gleich null oder negativ ist. Dementsprechend teilen wir die Involutionen in drei Klassen:

a) hyperbolische, d. h. solche, deren Hauptpunkte reell verschieden sind;

b) elliptische, solche, deren Hauptpunkte imaginär sind;

c) parabolische, solche, deren Hauptpunkte zusammenfallen.

Die Bedingung für eine parabolische Involution besteht darin, dafs in (5) $b = a^2$ ist. In diesem Falle geht die Gleichung (5) in die folgende über:

$$\mu = a \frac{\lambda - a}{\lambda - a}.$$

Wird hier $\lambda = a$ angenommen, so wird μ unbestimmt; dagegen wird für jeden andern Wert von λ die Gröfse μ den Wert a annehmen. Hier entspricht einem bestimmten Punkte a jeder beliebige Punkt der Geraden und jedem von a verschiedenen Punkte der Punkt a.

Die hyperbolische und die elliptische Involution haben die Eigenschaft gemeinsam, dafs jedem Punkte ein einziger Punkt zugeordnet wird. Aus diesem Grunde bezeichnet man sie als eigentliche Involutionen und setzt sie so in Gegensatz zu der parabolischen als einer uneigentlichen Involution.

10. In gleicher Weise wie die Punkte einer geraden Punktreihe können wir auch die Geraden eines Strahlenbüschels einander involutorisch zuordnen. Wir brauchen diese Theorie hier nicht eigens zu entwickeln; es genügt, in der vorangehenden Untersuchung die Formen A und B, welche als homogene lineare Ausdrücke in den Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 vorausgesetzt wurden, durch homogene lineare Formen A und B in den Punktkoordinaten zu ersetzen.

Wir möchten nur folgenden Satz hervorheben:

Projiziert man eine Punkt-Involution von einem beliebigen Punkte aus, der nicht in ihrem Träger liegt,

so bilden die Strahlen ebenfalls eine Involution; umgekehrt wird jede Strahleninvolution durch eine beliebige Gerade involutorisch geschnitten.

Zum Beweise lasse man den Strahl $\mathrm{A} = 0$ durch den Punkt $A = 0$, den Strahl $\mathrm{B} = 0$ durch den Punkt $B = 0$ gehen und verfüge über die noch disponibeln Faktoren so, dafs auch der Strahl $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$ durch den Punkt $A + B = 0$ geht. Dann liegt jeder Punkt $A + \lambda B = 0$ im Strahle $\mathrm{A} + \lambda \mathrm{B} = 0$.

11. Ein Kegelschnitt vermittelt auf jeder Geraden und für jeden Punkt eine Involution.

a) Wofern eine Gerade einer Kurve zweiter Ordnung nicht ganz angehört, kann man jedem ihrer Punkte den Schnittpunkt mit seiner Polaren zuordnen; mit andern Worten, man kann jedesmal zwei Punkte der Geraden einander entsprechen lassen, welche konjugierte Pole in Bezug auf die Kurve sind. Die auf diese Weise erhaltene Involution ist hyperbolisch, wenn die Gerade von der Kurve geschnitten wird, dagegen elliptisch, wenn sie keinen Punkt mit der Kurve gemeinschaftlich hat. Auf jeder Tangente wird eine parabolische Involution erzeugt, da dem Berührungspunkte jeder Punkt der Geraden entspricht und allen aufserhalb der Kurve gelegenen Punkten nur der Berührungspunkt zugeordnet ist.

b) Ebenso bestimmt ein Kegelschnitt dadurch eine involutorische Zuordnung der durch einen Punkt gehenden Strahlen, dafs man jeder solchen Geraden die Verbindungslinie ihres Poles mit dem Punkte zuordnet, oder anders ausgedrückt, dafs man jeder Geraden des Büschels die ihm angehörende konjugierte Polare zuweist. Die Hauptstrahlen einer solchen Involution sind die vom Punkte ausgehenden Tangenten; jenachdem diese reell oder imaginär sind, ist die Involution hyperbolisch oder elliptisch. Wenn der Punkt auf der Kurve liegt, so ist der Tangente jede beliebige durch den Punkt gehende Gerade zugeordnet; die Involution ist parabolisch. Indem der Mittelpunkt der Kurve zum Scheitel des Strahlenbüschels gewählt wird, sind die konjugierten Durchmesser die einander zugeordneten Strahlen; die sämtlichen Paare konjugierter Durchmesser bilden bei der Ellipse eine elliptische, bei der Hyperbel eine hyperbolische Involution.

12. Zum Schlusse erwähnen wir einige besondere Arten von Involutionen:

a) Wenn in einer Punktinvolution der eine Hauptpunkt ins Unendlichferne rückt, so haben je zwei zugeordnete Punkte von dem andern Hauptpunkt gleichen Abstand. Die Punkte λ und μ können nur dann zum Punkte α und dem unendlichfernen Punkte harmonisch liegen, wenn $\lambda\alpha = \alpha\mu$ ist; der Hauptpunkt α liegt jedesmal in der Mitte zwischen zwei einander entsprechenden Punkten.

b) Wenn die Hauptstrahlen einer Strahleninvolution auf einander senkrecht stehen, so halbieren sie die Winkel, welche je zwei einander entsprechende Strahlen mit einander bilden. Die Strahlen l und m können zu den beiden auf einander senkrecht stehenden Geraden a und b nur dann harmonisch liegen, wenn $\sphericalangle$ (la) = (am) ist. (In dieser Weise sind konjugierte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel einander zugeordnet.)

c) Eine Involution erhält man auch, indem man jedem Strahle eines Punktes den senkrechten Strahl zuordnet. Sie heifst eine Kreisinvolution, da die Paare konjugierter Durchmesser eines jeden Kreises eine Involution dieser Art bilden.

Übungen:

1) Die Bedingung dafür, dafs die Punktepaare (λ, μ), (λ', μ'), (λ'', μ'') in Involution liegen, ist durch die Gleichung (7) angegeben; man soll diese Gleichung in die folgenden vier Formen überführen:

$$(\lambda - \mu')(\lambda' - \mu'')(\lambda'' - \mu) + (\mu - \lambda')(\mu' - \lambda'')(\mu'' - \lambda) = 0$$
$$(\mu - \mu')(\lambda' - \mu'')(\lambda'' - \lambda) + (\lambda - \lambda')(\mu' - \lambda'')(\mu'' - \mu) = 0$$
$$(\mu - \mu')(\lambda' - \lambda'')(\mu'' - \lambda) + (\lambda - \lambda')(\mu' - \mu'')(\lambda'' - \mu) = 0$$
$$(\mu - \lambda')(\mu' - \mu'')(\lambda'' - \lambda) + (\lambda - \mu')(\lambda' - \lambda'')(\mu'' - \mu) = 0.$$

2) a) Wenn zwei Punktepaare einer Involution einander gegenseitig ausschliefsen, so kann man dieselbe durch eine rechtwinklige Strahleninvolution (Kreisinvolution) projizieren.

(Durch die Punkte λ und μ wird die Gerade in zwei Teile zerlegt; sollen die Punktepaare (λ, μ) und (λ', μ') sich gegenseitig ausschliefsen, so liegt von den Punkten λ' und μ' der eine in dem einen, der andere in dem andern Teile der Geraden. In diesem Falle schneiden sich die über $\lambda\mu$ und $\lambda'\mu'$ als Durchmesser beschriebenen Kreise.)

b) Man soll zu einem beliebigen Punkte der Geraden den entsprechenden Punkt konstruieren.

(Jeder Durchmesser eines der beiden Kreise liefert ein Strahlenpaar der Kreisinvolution und damit ein Punktepaar der gegebenen Involution.)

Anhang
über kollineare und reciproke Zuordnung.

1. Zwei Ebenen heifsen kollinear auf einander bezogen, wenn jedem Punkte der einen ein Punkt der andern und jeder Geraden der einen eine Gerade der andern so zugeordnet ist, dafs jedesmal, wenn in der einen Ebene ein Punkt in einer Geraden liegt, auch der entsprechende Punkt in der entsprechenden Geraden liegt.

Hiernach mufs jedem Punkte π der ersten Ebene ein Punkt π' der zweiten und jeder Geraden p der ersten eine Gerade p' der zweiten entsprechen; geht die Gerade p durch den Punkt π, so liegt notwendig auch der Punkt π' in der Geraden p'.

2. Dafs man zwei Ebenen kollinear auf einander beziehen kann, erkennt man auf folgendem Wege. Man wähle in jeder der beiden Ebenen ein Koordinatensystem ganz willkürlich. Die Punkte der ersten Ebene mögen durch die Verhältnisse $x_1 : x_2 : x_3$ und ihre Geraden durch die Verhältnisse $u_1 : u_2 : u_3$ bestimmt sein, wo die Punkt- und die Linienkoordinaten im festgesetzten Sinne zusammengehören sollen. In ganz entsprechender Weise mögen in der zweiten Ebene die Punkte durch die Gröfsen y_1, y_2, y_3 und die Geraden durch v_1, v_2, v_3 bestimmt sein. Jetzt lasse man die Punkte (x) und (y) dann und nur dann einander entsprechen, wenn ist:

$$x_1 : x_2 : x_3 = y_1 : y_2 : y_3.$$

Ebenso sollen für zwei einander zugeordnete Geraden (u) und (v) die Beziehungen statthaben:

$$u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3.$$

Jetzt entspricht

a) jedem Punkte der einen Ebene ein einziger Punkt der andern;

b) die Geraden der Ebenen sind einander eindeutig zugeordnet;

c) so oft ein Punkt (x) in einer Geraden (u) liegt, liegt auch der entsprechende Punkt (y) in der zu (u) zugeordneten Geraden (v).

Die Bedingung, dafs der Punkt (x) in der Geraden (u) liegt, wird durch die Gleichung angegeben:

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0.$$

Wegen der Beziehung zwischen den (x) und den (y), den (u) und den (v) ist jetzt auch:

$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0.$$

Diese Gleichung sagt aber aus, dafs der Punkt (y) in die Gerade (v) fällt.

3. Um zwei Ebenen kollinear auf einander zu beziehen, darf man in jeder von ihnen vier Punkte, von denen keine drei in gerader Linie liegen, willkürlich annehmen und diese einander zuordnen.

In der ersten Ebene seien die Punkte α, β, γ, δ und in der zweiten die Punkte α', β', γ', δ' in der festgesetzten Weise gewählt und der Reihe nach einander zugeordnet. Indem man die Punkte α, β, γ zu Eckpunkten, den Punkt δ zum Einheitspunkte der Koordinaten (x) in der ersten Ebene wählt und auf gleiche Weise die Koordinaten (y) in der zweiten Ebene vermittelst der Punkte α', β', γ', δ' bestimmt und dann die soeben angegebene Zuordnung ausführt, werden die Ebenen kollinear auf einander bezogen. Hierbei sind aber die Punkte α und α', β und β', γ und γ', δ und δ' einander zugeordnet.

4. Umgekehrt giebt es nur eine kollineare Zuordnung zweier Ebenen, bei der vier Punkte der einen vier Punkten der andern entsprechen, vorausgesetzt, dafs niemals drei dieser Punkte in gerader Linie liegen.

Die Geraden $(\alpha\delta)$ und $(\beta\gamma)$ mögen einander in μ und die Geraden $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\delta)$ in 1 schneiden. Es möge die Gerade $(\beta\delta)$ von (1μ) in ν_1, $(\alpha\beta)$ von $(\gamma\nu_1)$ in 2, dann $(\beta\delta)$ von (2μ) in ν_2, $(\alpha\beta)$ von $(\gamma\nu_2)$ in 3 u. s. w. geschnitten werden. Dieser Prozefs führt auf eine unendliche Reihe von Punkten der Geraden $(\alpha\beta)$, zu denen die entsprechenden Punkte unmittelbar gefunden werden können. Zwischen je zwei dieser Punkte kann man durch Verbindung früher erhaltener Punkte beliebig viele neue Punkte einschieben und somit zu jedem Punkte von $(\alpha\beta)$ den entsprechenden Punkt von $(\alpha'\beta')$ konstruieren. Dasselbe kann man für die Punkte

der Geraden $(\gamma\delta)$ und $(\gamma'\delta')$ durchführen. Dadurch ist es möglich, zu jeder Geraden der einen Ebene die Gerade der andern zu bestimmen, indem man die Schnittpunkte mit $(\alpha\beta)$ und $(\gamma\delta)$ benutzt und von diesen zu den zugeordneten Punkten in $(\alpha'\beta')$ und $(\gamma'\delta')$ übergeht. Endlich stellen sich beliebige entsprechende Punkte als die Schnittpunkte entsprechender Geraden dar.

5. Statt durch vier Punktepaare kann man die Zuordnung auch durch vier Geradenpaare bestimmen; nur dürfen weder in der einen noch in der anderen Ebene drei von diesen Geraden durch einen Punkt gehen.

6. Sind zwei Ebenen kollinear einander zugeordnet, so kann man stets die Koordinaten so wählen, dafs sie für entsprechende Punkte und entsprechende gerade Linien dieselben Verhältnisse haben.

Nachdem in der ersten Ebene die Koordinaten beliebig gewählt sind, bestimme man zu den Eckpunkten α, β, γ des Koordinatendreiecks und zu dem Einheitspunkte δ die entsprechenden Punkte α', β', γ', δ' in der zweiten Ebene. Jetzt wähle man in dieser Ebene das Koordinatensystem so, dafs α', β', γ' die Eckpunkte, δ' der Einheitspunkt ist, und lasse solche Punkte einander entsprechen, für welche die Koordinatenverhältnisse einander gleich sind. Dadurch werden aber die Punkte α und α', β und β', γ und γ', δ und δ' einander zugeordnet. Da dasselbe bei der gegebenen Zuordnung eintritt, so ist sie mit der eingeführten identisch.

6. I n k o l l i n e a r e n E b e n e n s i n d s o w o h l e n t s p r e c h e n d e P u n k t r e i h e n, a l s a u c h e n t s p r e c h e n d e S t r a h l e n b ü s c h e l p r o j e k t i v a u f e i n a n d e r b e z o g e n.

In einer Punktreihe der ersten Ebene mögen vier Punkte die Koordinaten haben:

$$(1) \quad (x' + \lambda_1 x''), \ (x' + \lambda_2 x''), \ (x' + \lambda_3 x''), \ (x' + \lambda_4 x'').$$

Bei der soeben angegebenen Zuordnung möge dem Punkte (x') der Punkt (y'), dem Punkte (x'') der Punkt (y'') entsprechen. Wenn jetzt den Punkten (1) die Punkte zugeordnet sind:

$$(2) \quad (y' + \mu_1 y''), \ (y' + \mu_2 y''), \ (y' + \mu_3 y''), \ (y' + \mu_4 y''),$$

so mufs sein:

$$\mu_1 = \varrho\lambda_1, \ \mu_2 = \varrho\lambda_2, \ \mu_3 = \varrho\lambda_3, \ \mu_4 = \varrho\lambda_4.$$

Daher sind nach § 5, 12 die Doppelverhältnisse der vier Punkte einander gleich.

Auf dieselbe Weise zeigt man den Satz für entsprechende Strahlen zugeordneter Strahlenbüschel.

7. Sind x_1, x_2, x_3 homogene Punktkoordinaten in der ersten, z_1, z_2, z_3 in der zweiten Ebene, so kann die kollineare Zuordnung stets durch Gleichungen von der Form vermittelt werden:

$$(3)\quad \begin{aligned} \varrho x_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\ \varrho x_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\ \varrho x_3 &= a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3, \end{aligned}$$

wo ϱ ein willkürlicher Faktor ist und $a_{11} \ldots a_{33}$ neun Konstante sind, welche nur der Bedingung zu genügen haben, dafs ihre Determinante von null verschieden ist.

Man kann die Richtigkeit dieser Behauptung leicht direkt zeigen; man kann sie aber auch aus dem obigen Satze herleiten, indem man die dort benutzten Koordinaten (y) in die Koordinaten (z) mittelst der Gleichungen (7) § 5, 6 umwandelt.

Hiernach hängt eine kollineare Zuordnung von dem Verhältnisse der neun Koefficienten $a_{\iota\varkappa}$, also von acht willkürlichen Gröfsen ab, was auch aus dem in 4 bewiesenen Satze hervorgeht.

8. Man kann die zweite Ebene mit der ersten zusammenfallen lassen. Indem man dementsprechend annimmt, die Koordinaten (x) und (z) seien auf dasselbe Koordinatendreieck mit demselben Einheitspunkte bezogen, wird die Ebene durch die Gleichungen (3) kollinear sich selbst zugeordnet. Dabei kann man die Variabeln (x) und (z) im allgemeinen nicht mit einander vertauschen; es macht also einen Unterschied, ob man denselben Punkt der ersten oder der zweiten Ebene angehören läfst.

9. Zwei Ebenen sind einander reciprok zugeordnet, wenn jedem Punkte der ersten eine Gerade der zweiten und jeder Geraden der ersten ein Punkt der zweiten so zugeordnet ist, dafs jedesmal, wenn ein Punkt in einer Geraden liegt, auch die entsprechende Gerade durch den zugeordneten Punkt geht.

Dem Punkte α der ersten Ebene möge die Gerade a′ der zweiten, der Geraden b der ersten möge der Punkt β' der zweiten entsprechen; jedesmal, wenn der Punkt α in der Geraden b liegt, mufs auch die Gerade a′ durch den Punkt β' gehen.

10. Die ersten Sätze über die reciproke Zuordnung zweier Ebenen lassen sich auf eine ähnliche Weise zeigen, wie die entsprechenden Sätze über die kollineare Zuordnung; es genügt aus diesem Grunde, die Sätze anzuführen.

Zwei Ebenen können nur auf eine Weise reciprok so auf einander bezogen werden, dafs vier geraden Linien der einen, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, vier Punkte der andern entsprechen, von denen keine drei in gerader Linie liegen. Bei passender Wahl der Koordinaten (x) und (u) in der ersten, (y) und (v) in der zweiten Ebene kann man die reciproke Zuordnung durch die Gleichungen vermittelt denken:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = v_1 : v_2 : v_3 : v_4,$$
$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = u_1 : u_2 : u_3 : u_4.$$

Wenn man dagegen in der ersten Ebene die Koordinaten (x) und (u), in der zweiten die Koordinaten (z) und (w) ganz willkürlich annimmt und nur festsetzt, dafs sowohl die Koordinaten (x) und (u) wie auch (z) und (w) zusammengehören sollen, so gelten die Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{aligned} \varrho u_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + a_{13} z_3 \\ \varrho u_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 + a_{23} z_3 \\ \varrho u_3 &= a_{31} z_1 + a_{32} z_2 + a_{33} z_3, \end{aligned}$$

aus denen die folgenden drei Gleichungen hervorgehen:

$$(5)\quad \begin{aligned} \sigma w_1 &= a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + a_{31} x_3 \\ \sigma w_2 &= a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + a_{32} x_3 \\ \sigma w_3 &= a_{13} x_1 + a_{23} x_2 + a_{33} x_3. \end{aligned}$$

Jede Punktreihe in der einen Ebene ist zu dem ihr entsprechenden Strahlenbüschel der andern projektiv zugeordnet.

11. Wenn man die beiden Ebenen zusammenfallen läfst und für die Koordinaten (x) und (w) dasselbe System zu Grunde legt, so hat man zu unterscheiden, ob man den Punkt als der ersten oder der zweiten Ebene angehörig betrachten will; im ersten Falle hat man ihm die Koordinaten (x), im zweiten die Koordinaten (z) zu geben.

Nun unterscheiden sich die Gleichungen (4) und (5) dadurch, dafs die Koefficienten der Horizontal- und der Vertikalreihen mit einander vertauscht sind. Wenn also allgemein die Beziehung statthat:

$$(6)\quad a_{\iota\varkappa} = a_{\varkappa\iota},$$

so werden die Gleichungen (4) und (5) identisch. Alsdann entspricht jedem Punkte dieselbe Gerade, mag man ihn der ersten oder der zweiten Ebene zuweisen, und ebenso wird unter dieser Annahme jeder Geraden derselbe Punkt zugeordnet. Eine derartige Zuordnung in der Ebene nennt man ein ebenes Polarsystem oder eine polare Reciprocität in der Ebene.

12. Ein ebenes Polarsystem ist bestimmt, sobald man zu zwei Punkten 1 und 2 die entsprechenden Geraden I und II kennt und zu einem Punkte 3 von I eine durch I gehende Gerade III zuordnet. Da jetzt dem Schnittpunkte der Geraden I und II die Verbindungslinie der Punkte 1 und 2 entspricht, so kennt man zu vier Punkten, von denen keine drei in gerader Linie liegen, die zugeordneten Geraden; dadurch ist nach dem Obigen die reciproke Zuordnung bestimmt.

13. Aus dem Begriff der reciproken Zuordnung in Verbindung mit dem Satze, dafs jedem Punkte eine einzige Gerade und jeder Geraden ein einziger Punkt entspricht, geht unmittelbar hervor, dafs für ein ebenes Polarsystem folgende Sätze gelten.

Lassen wir einen Punkt α sich auf einer Geraden p bewegen, so dreht sich die ihm zugeordnete Gerade a um den zu p zugeordneten Punkt π, und umgekehrt.

Vier harmonischen Punkten einer Geraden entsprechen vier harmonische Strahlen eines Büschels, und umgekehrt.

Ordnet man jedem Punkte einer Punktreihe den Schnittpunkt mit der entsprechenden Geraden zu, so erhält man eine Punktinvolution.

Ordnet man jedem Strahle eines Büschels die Verbindungslinie des Scheitels mit dem entsprechenden Punkte zu, so erhält man eine Strahleninvolution.

14. Diese Sätze stimmen durchaus überein mit den Sätzen, welche wir früher über Pole und Polare eines eigentlichen Kegelschnittes gefunden haben. In der That vermittelt jeder eigentliche Kegelschnitt eine polare Zuordnung der Punkte und der Geraden der Ebene. Ersetzt man in der Gleichung (4) die Variabeln z_1, z_2, z_3 durch x_1', x_2', x_3', so werden diese Gleichungen identisch mit (4) § 14, 8.

15. Umgekehrt führt jedes ebene Polarsystem auf eine Kurve zweiter Ordnung. Um das zu erkennen, ersetzen wir in der

Gleichung (4) die Koordinaten z_1, z_2, z_3 durch x_1, x_1, x_3. Nun wird die Gleichung

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

erfüllt, sobald der Punkt (x) in die entsprechende Gerade (u) fällt. Demnach liegt der Punkt (x) jedesmal in der entsprechenden Geraden, sobald die Summe der mit x_1, x_2, x_3 multiplizierten rechten Seiten von (4) verschwindet, oder sobald seine Koordinaten der Gleichung genügen:

$$(7) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0.$$

Diese Gleichung liefert somit alle Punkte, welche in die ihnen zugeordneten Geraden fallen. Aus diesem Grunde nennt man den Kegelschnitt (7) die Ordnungskurve des Polarsystems.

Übungen:

1) a) Wenn zwei Ebenen derselben dritten Ebene kollinear zugeordnet sind, so sind sie auch einander kollinear zugeordnet.

b) Wenn zwei Ebenen derselben dritten Ebene reciprok zugeordnet sind, so sind sie einander kollinear zugeordnet.

2) a) Wenn zwei Ebenen kollinear auf einander bezogen sind, so entspricht jedem Kegelschnitte der einen ein Kegelschnitt der andern Ebene in der Weise, dafs jedem Punkte des ersten ein Punkt und jeder Tangente des ersten eine Tangente des zweiten zugeordnet ist. Drei Punkten der einen Ebene, welche in Bezug auf den in ihr gelegenen Kegelschnitt ein zu sich selbst konjugiertes Tripel bilden, entsprechen in der andern die Eckpunkte eines Polardreiecks zu dem in ihr gelegenen Kegelschnitte.

b) Will man zwei Ebenen kollinear in der Weise auf einander beziehen, dafs einem Kegelschnitte der einen ein bestimmter Kegelschnitt der andern entsprechen soll, so kann man noch zwei beliebige Punkte π_1 und π_2 einander zuordnen; dann entspricht auch einer bestimmten Geraden p_1 der ersten eine bestimmte Gerade p_2 der zweiten. Jetzt ist die Zuordnung eindeutig festgelegt, sobald man einem Punkte von p_1 einen bestimmten Punkt von p_2 entsprechen läfst.

c) Wo dürfen die Punkte nicht angenommen werden, damit sie zur Bestimmung der kollinearen Zuordnung genügen?

d) Wie müssen die in b) gewählten Punkte den Kurven gegenüber liegen, damit die Zuordnung reell wird?

e) Man kann die kollineare Zuordnung zweier Ebenen, in

denen zwei Kegelschnitte einander entsprechen sollen, auch dadurch bestimmen, dafs man drei Punkten des einen Kegelschnittes drei Punkte des andern beliebig zuweist.

f) Auch bei der reciproken Zuordnung zweier Ebenen entspricht jedem Kegelschnitte in der einen ein Kegelschnitt in der andern; jetzt ist aber jedem Punkte des einen eine Tangente des andern zugeordnet. Man übertrage die soeben für die kollineare Zuordnung angegebenen Sätze auf die reciproke.

3) a) Wenn eine Ebene zu sich selbst kollinear zugeordnet ist, so entsprechen sich selbst im allgemeinen drei Punkte und drei gerade Linien, welche demselben Dreiecke angehören.

b) Demnach kann im allgemeinen bei geeigneter Wahl der Koordinaten die Zuordnung durch die Gleichungen vermittelt werden:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda_1 y_1 : \lambda_2 y_2 : \lambda_3 y_3, \quad \lambda_1 u_1 : \lambda_2 u_2 : \lambda_3 u_3 = v_1 : v_2 : v_3.$$

4) a) Wenn eine Ebene in der Weise kollinear auf sich selbst bezogen ist, dafs jedem Punkte derselbe Punkt entspricht, mag man ihn der einen oder der andern von den beiden vereinigten Ebenen zuweisen, so müssen die Koefficienten den Bedingungen genügen:

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2$$
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33}$$
$$= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.$$

b) Den aufgestellten Bedingungen genügt das System der Koefficienten:

$$\begin{matrix} \varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 & 2(\lambda\mu + \varkappa\nu) & 2(\lambda\nu - \varkappa\mu) \\ 2(\lambda\mu - \varkappa\nu) & \varkappa^2 + \mu^2 - \nu^2 - \lambda^2 & 2(\mu\nu + \varkappa\lambda) \\ 2(\lambda\nu + \varkappa\mu) & 2(\mu\nu - \varkappa\lambda) & \varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2. \end{matrix}$$

c) Man untersuche die kollineare Zuordnung für folgende Koefficienten:

α) in b) werde $\varkappa = \nu = 0$ angenommen;

β) die Koefficienten seien:

$$\begin{matrix} \lambda^2 - \mu^2 & 2\lambda\mu & 0 \\ -2\lambda\mu & \lambda^2 - \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \mu^2. \end{matrix}$$

γ) Die Koefficienten sollen sein:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1. \end{matrix}$$

δ) Welche Punkte kann man einander noch willkürlich zuordnen, damit die hier betrachtete Kollinearität erhalten werde?

§ 23.

Der Kegelschnittsbüschel.

1. Wir gehen von zwei Kurven der gleichen Ordnung n aus, deren Gleichungen in Punktkoordinaten sind:

$$(1) \quad \Phi(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \Psi(x_1, x_2, x_3) = 0;$$

alsdann sagen wir, alle Kurven, deren Gleichungen für einen beliebigen konstanten Faktor μ in der Form:

$$(2) \quad \Phi(x_1, x_2, x_3) + \mu\Psi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

dargestellt werden können, gehörten dem durch die Kurven (1) bestimmten Büschel n^ter^ Ordnung an.

Der Büschel ist durch zwei beliebige seiner Kurven eindeutig bestimmt. Die Koefficienten α und β seien beliebig, aber fest gewählt; dann gehören die Kurven

$$\Phi + \alpha\Psi = 0 \text{ und } \Phi + \beta\Psi = 0$$

dem Büschel (2) an. Diese beiden Kurven bestimmen den Büschel aller in der Form

$$(\Phi + \alpha\Phi) + \nu(\Phi + \beta\Psi) = 0$$

darstellbaren Kurven. Die Gesamtheit derselben ist aber mit der Gesamtheit der Kurven (2) identisch; denn indem ν alle Werte annimmt, erhält man auch für den Quotienten $(\alpha + \nu\beta) : (1 + \nu)$ alle möglichen Werte; man darf daher

$$\mu = \frac{\alpha + \beta\nu}{1 + \nu}$$

setzen.

2. Wenn ein Punkt zwei Kurven eines Büschels angehört, so gehen alle Kurven desselben durch ihn hindurch.

Wie wir eben gesehen haben, dürfen wir annehmen, dafs $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ zwei beliebige Kurven des Büschels sind; nun ist es unmittelbar klar, dafs jedesmal, wenn für einen Punkt (x')

die Gleichungen $\Phi(x') = 0$ und $\Psi(x') = 0$ erfüllt sind, auch die Gleichung $\Phi(x') + \mu\Psi(x') = 0$ befriedigt sein mufs.

Umgekehrt darf man den Satz aussprechen:

Wenn eine Kurve durch den vollständigen Schnitt zweier Kurven hindurchgeht und die drei Kurven von derselben Ordnung sind, so gehören sie einem Büschel an.

Dieser Satz ist nur richtig, wenn der Grad der Berührung in Betracht gezogen wird, welche in einem gemeinschaftlichen Punkte der beiden ersten Kurven statthat. Auf den Beweis können wir aber hier nicht eingehen.

3. Durch jeden Punkt der Ebene, der nicht den sämtlichen Kurven des Büschels angehört, geht eine einzige Kurve des Büschels hindurch.

Damit die Kurve (2) durch den Punkt (x') hindurchgeht, mufs die Gleichung erfüllt sein:

$$\Phi(x') + \mu\Psi(x') = 0.$$

Da in dieser Gleichung $\Phi(x')$ und $\Psi(x')$ nicht zusammen verschwinden dürfen, weil sonst der Punkt (x') allen Kurven des Büschels angehören müfste, läfst sich der Koefficient μ aus ihr eindeutig bestimmen.

4. Wenn speciell die Kurven des Büschels von der zweiten Ordnung sind, so nennen wir ihn einen Büschel zweiter Ordnung oder einen Kegelschnittsbüschel.

Indem wir von den beiden Kurven ausgehen:

$$(3) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0, \quad \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0,$$

stellen wir eine beliebige Kurve des Büschels in der Form dar:

$$(4) \quad \Sigma(a_{\iota\varkappa} + \mu b_{\iota\varkappa}) x_\iota x_\varkappa = 0.$$

Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

Wenn zwei Punkte konjugierte Pole in Bezug auf irgend zwei Kurven eines Kegelschnittsbüschels sind, so haben sie dieselbe Eigenschaft für sämtliche Kurven des Büschels.

Zum Beweise nehmen wir an, dafs diejenigen Kurven, für welche die Punkte (x') und (x'') konjugierte Pole sein sollen, durch die Gleichungen (3) dargestellt werden. Dementsprechend sind die Gleichungen befriedigt:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0, \quad \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0.$$

Indem wir die zweite Gleichung mit μ multiplizieren und zur ersten addieren, folgt die neue Gleichung:

$$\Sigma(a_{\iota\varkappa} + \mu b_{\iota\varkappa})\, x_\iota' \, x_\varkappa'' = 0,$$

und diese sagt aus, dafs die Punkte (x') und (x'') auch konjugierte Pole für jede Kurve (4) sind.

5. Wenn zwei Punkte nicht konjugierte Pole in Bezug auf alle Kurven eines Kegelschnittsbüschels sind, so gehört dem Büschel stets eine einzige Kurve an, für welche die Punkte konjugierte Pole sind.

Sollen die Punkte (x') und (x'') konjugierte Pole in Bezug auf die Kurve (4) sein, so mufs die Gleichung erfüllt sein:

$$\Sigma(a_{\iota\varkappa} + \mu b_{\iota\varkappa})\, x_\iota' \, x_\varkappa'' = 0.$$

Diese Gleichung können wir aber auch in der Form schreiben:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' \, x_\varkappa'' + \mu \, \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota' \, x_\varkappa'' = 0.$$

Wenn diese Gleichung nicht für jeden Wert von μ befriedigt wird, so giebt es stets einen einzigen Wert von μ, für den sie erfüllt wird.

6. Aus den beiden letzten Sätzen lassen sich wichtige Folgerungen ziehen, die wir in dem folgenden Satze zusammenfassen:

Die sämtlichen Polaren zu einem festen Punkte in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels gehen durch einen zweiten festen Punkt; nur wenn der Punkt singulärer Punkt eines dem Büschel angehörenden Linienpaares ist, hat er für alle Kurven dieselbe Polare.

Wenn die Polaren des Punktes (x') in Bezug auf die Kurven (3) nicht identisch sind, so ist ihr Schnittpunkt (x'') konjugierter Pol zu (x') für die beiden und damit für alle Kurven des Büschels; somit geht die Polare von (x') für einen beliebigen Kegelschnitt des Büschels durch den Punkt (x'') hindurch.

Wofern aber der Punkt (x') für die Kegelschnitte (3) dieselbe Polare hat, ist jeder Punkt dieser Geraden konjugierter Pol zu (x') in Bezug auf alle Kurven des Büschels, die Gerade selbst also gemeinschaftliche Polare. In diesem Falle giebt es nach 5. eine einzige Kurve des Büschels, für welche dem Punkte (x') ein beliebiger, nicht der gemeinschaftlichen Polare p angehörender Punkt (x^0) als Pol zugeordnet ist; dann ist (x') konjugierter Pol zu allen Punkten auf einer den Punkt (x^0) mit einem beliebigen Punkte von p verbindenden Geraden oder mit andern Worten zu allen

Punkten der Ebene. Der Punkt (x') ist also singulärer Punkt der ausgewählten Kurve und diese ein Linienpaar oder eine Doppellinie.

Wenn umgekehrt der Punkt (x') singulärer Punkt eines dem Büschel angehörenden Linienpaares ist, so ist zu ihm in Bezug auf diese Kurve jeder Punkt der Ebene konjugierter Pol. Die Punkte seiner Polare für irgend eine zweite Kurve sind konjugierte Pole in Bezug auf alle Kurven des durch die beiden ersten Kurven bestimmten Büschels; diese Gerade ist also gemeinschaftliche Polare.

(Den Fall, dafs zwei Kurven des Büschels denselben singulären Punkt besitzen, brauchen wir nicht zu untersuchen.)

7. Wir wollen diese Sätze analytisch nachweisen. Die Polare des Punktes (x') in Bezug auf die Kurve (4) hat die Gleichung:

$$(5)\quad \Sigma(a_{\iota\varkappa} + \mu b_{\iota\varkappa})\, x_\iota\, x_\varkappa' = 0$$

$$\text{oder } \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota\, x_\varkappa' + \mu\, \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota\, x_\varkappa' = 0.$$

Im allgemeinen werden die Gleichungen:

$$(6)\quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota\, x_\varkappa' = 0 \text{ und } \Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota\, x_\varkappa' = 0$$

verschiedene gerade Linien darstellen. Dann geht jede durch die Gleichung (5) dargestellte Gerade durch den Schnitt der Linien (6); die Gleichung (5) stellt also einen Strahlenbüschel dar. Hierdurch ist der erste Teil des obigen Satzes nochmals bewiesen.

8. Damit die Gleichung (4) ein Linienpaar darstellt, mufs die Determinante aus den Koefficienten verschwinden; es mufs also sein:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} a_{11} + \mu b_{11} & a_{12} + \mu b_{12} & a_{13} + \mu b_{13} \\ a_{21} + \mu b_{21} & a_{22} + \mu b_{22} & a_{23} + \mu b_{23} \\ a_{31} + \mu b_{31} & a_{32} + \mu b_{32} & a_{33} + \mu b_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung liefert im allgemeinen drei verschiedene Wurzeln μ_1, μ_2, μ_3; der Büschel enthält also im allgemeinen drei Linienpaare.

(Dabei müssen wir aber beachten, dafs dasjenige Linienpaar, welches zu einer komplexen Wurzel der Gleichung (7) gehört, durch eine Gleichung mit komplexen Koefficienten dargestellt wird.)

Ist μ_1 eine Wurzel der Gleichung (7), so ist die Spitze (x') des zu dieser Wurzel gehörenden Linienpaares durch die Gleichungen bestimmt:

$$(8)\quad \begin{aligned} (a_{11} + \mu_1 b_{11}) x_1' + (a_{12} + \mu_1 b_{12}) x_2' + (a_{13} + \mu_1 b_{13}) x_3' &= 0 \\ (a_{21} + \mu_1 b_{21}) x_1' + (a_{22} + \mu_1 b_{22}) x_2' + (a_{23} + \mu_1 b_{23}) x_3' &= 0 \\ (a_{31} + \mu_1 b_{31}) x_1' + (a_{32} + \mu_1 b_{32}) x_2' + (a_{33} + \mu_1 b_{33}) x_3' &= 0. \end{aligned}$$

Ebenso führt die Wurzel μ_2 auf ein Linienpaar, dessen singulärer Punkt (x'') den Gleichungen genügt:

$$(9)\quad \begin{aligned} (a_{11} + \mu_2 b_{11}) x_1'' + (a_{12} + \mu_2 b_{12}) x_2'' + (a_{13} + \mu_2 b_{13}) x_3'' &= 0 \\ (a_{21} + \mu_2 b_{21}) x_1'' + (a_{22} + \mu_2 b_{22}) x_2'' + (a_{23} + \mu_2 b_{23}) x_3'' &= 0 \\ (a_{31} + \mu_2 b_{31}) x_1'' + (a_{32} + \mu_2 b_{32}) x_2'' + (a_{33} + \mu_2 b_{33}) x_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Indem wir die Gleichungen (8) der Reihe nach mit x_1'', x_2'', x_3'' multiplizieren und addieren, gelangen wir zu der neuen Gleichung:

$$\Sigma (a_{\iota\varkappa} + \mu_1 b_{\iota\varkappa}) x_\iota' x_\varkappa'' = 0.$$

Ebenso leiten wir aus den Gleichungen (9) durch Multiplikation mit x_1', x_2', x_3' die Relation her:

$$\Sigma (a_{\iota\varkappa} + \mu_2 b_{\iota\varkappa}) x_\iota' x_\varkappa'' = 0.$$

Da die Wurzeln μ_1 und μ_2 verschieden sind, sagen diese beiden Gleichungen aus, dafs die Punkte (x') und (x'') konjugierte Pole in Bezug auf zwei Kurven des Büschels sind; sie sind also konjugierte Pole für alle Kurven des Büschels.

(Will man diesen Satz nicht benutzen, so subtrahiere man die beiden Gleichungen von einander; da $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ ist, folgt die Beziehung $\Sigma b_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0$; dann mufs auch $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota' x_\varkappa'' = 0$ sein.)

9. Sind die Punkte 1, 2, 3 die singulären Punkte der drei dem Büschel angehörenden Linienpaare, so folgt genau auf dem eben durchgeführten Wege, dafs je zwei dieser Punkte konjugierte Pole in Bezug auf alle Kurven des Büschels sind. Daher ist die Gerade 23 die Polare des Punktes 1, die Gerade 31 Polare des Punktes 2 und die Gerade 12 Polare des Punktes 3 in Bezug auf alle Kurven des Büschels. Dadurch haben wir folgenden Satz bewiesen:

Einem Kegelschnittsbüschel gehören im allgemeinen drei Linienpaare an; die singulären Punkte derselben sind die Eckpunkte eines Polardreiecks, welches allen Kurven des Büschels gemeinschaftlich ist.

In Fig. 32 sind die drei Punkte λ, μ, ν und die drei Linienpaare reell; in Fig. 33 ist nur der Punkt λ und das von ihm ausgehende Linienpaar reell; in Fig. 34 sind λ, μ, ν reell, aber nur von λ geht ein reelles Linienpaar aus.

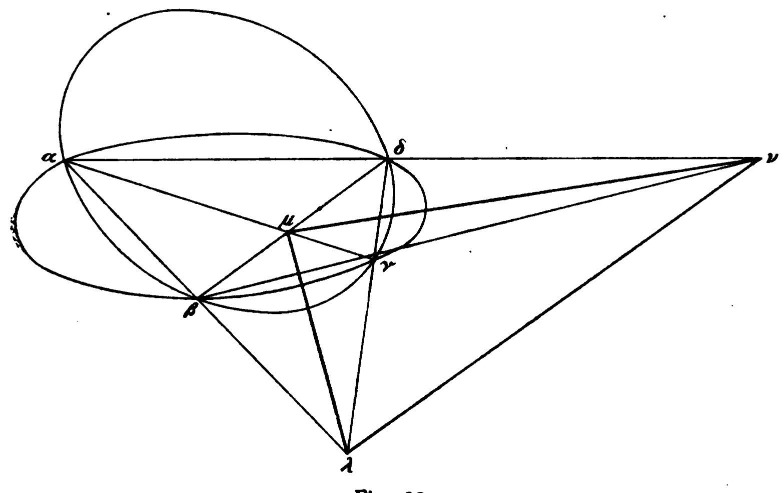


Fig. 32.

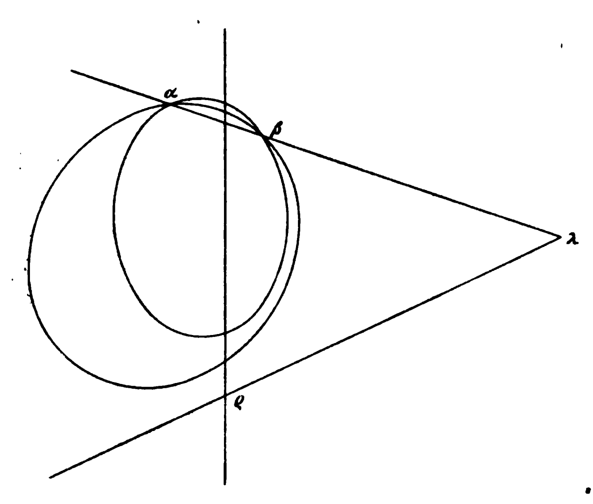


Fig. 33.

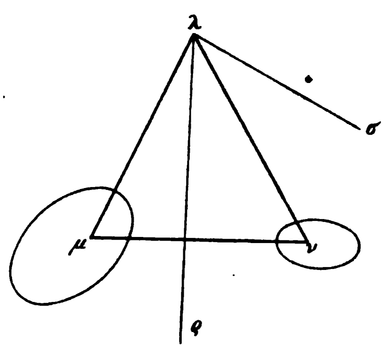


Fig. 34.

10. Soll umgekehrt der Punkt (x') dieselbe Polare für alle Kurven des Büschels haben, so müssen die beiden Gleichungen (6) dieselbe Gerade darstellen; die Koefficienten von x_1, x_2, x_3 in diesen Gleichungen müssen dann einander proportional sein oder es müssen die Gleichungen bestehen:

$$\Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa' = \omega \Sigma b_{1\varkappa} x_\varkappa', \quad \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa' = \omega \Sigma b_{2\varkappa} x_\varkappa',$$
$$\Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa' = \omega \Sigma b_{3\varkappa} x_\varkappa'.$$

Diese drei Gleichungen schreiben wir in folgender Form:

$$(10)\quad \begin{aligned} (a_{11} - \omega b_{11}) x_1' + (a_{12} - \omega b_{12}) x_2' + (a_{13} - \omega b_{13}) x_3' &= 0 \\ (a_{21} - \omega b_{21}) x_1' + (a_{22} - \omega b_{22}) x_2' + (a_{23} - \omega b_{23}) x_3' &= 0 \\ (a_{31} - \omega b_{31}) x_1' + (a_{32} - \omega b_{32}) x_2' + (a_{33} - \omega b_{33}) x_3' &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich aber von den Gleichungen (8) nur dadurch, dafs der Faktor μ_1 durch $-\omega$ ersetzt ist. Somit sind die singulären Punkte der dem Büschel angehörenden Linienpaare die einzigen Punkte, welche für alle Kurven des Büschels dieselbe Polare besitzen.

11. Wählen wir das gemeinsame Polardreieck zum Koordinatendreieck, so stellen sich die Gleichungen aller Kurven des Büschels durch dieselben drei Quadrate dar; die Gleichungen (3) nehmen jetzt die Gestalt an:

$$(11)\quad \begin{aligned} \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 &= 0 \\ \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \beta_3 y_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

(Dabei ist aber zu bemerken, dafs die Koefficienten in den Gleichungen, durch welche der Zusammenhang der Variabeln x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 dargestellt wird, zum Teil komplexe Werte

besitzen können; die Eckpunkte des neuen Koordinatendreiecks können somit auch imaginär sein.)

Indem wir die obere Gleichung (11) mit β_1, die untere mit α_1 multiplizieren und subtrahieren, wird die Variabele y_1 aus den Gleichungen eliminiert, und die neue Gleichung stellt ein dem Büschel angehörendes Linienpaar dar. In ähnlicher Weise erhalten wir die Gleichungen der beiden andern Linienpaare. Da die Schnittpunkte zweier solcher Paare allen Kurven des Büschels angehören, ergiebt sich der Satz:

Zwei Kegelschnitte schneiden sich im allgemeinen in vier Punkten.

12. Umgekehrt läfst sich durch vier beliebig gewählte Punkte ein Büschel von Kegelschnitten legen. Um das zu beweisen, nehme man zu den vier Punkten 1, 2, 3, 4 einen fünften Punkt 5 hinzu und lege durch diese fünf Punkte einen Kegelschnitt. Jetzt wähle man einen sechsten Punkt 6, der nicht auf dem soeben konstruierten Kegelschnitte liegt, und bestimme den Kegelschnitt, der durch die Punkte 1, 2, 3, 4, 6 hindurchgeht. Diese beiden Kegelschnitte haben die vier Punkte 1, 2, 3, 4 gemeinschaftlich.

13. Soll der Punkt (x') der Pol der Geraden

$$(12)\qquad l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$$

für den Kegelschnitt (4) sein, so müssen die Gröfsen l_1, l_2, l_3 den Koefficienten von x_1, x_2, x_3 in der Gleichung (5) proportional sein. Es müssen daher die Gleichungen bestehen:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varrho l_1 &= \Sigma (a_{1\varkappa} + \mu b_{1\varkappa})\, x_\varkappa' \\ \varrho l_2 &= \Sigma (a_{2\varkappa} + \mu b_{2\varkappa})\, x_\varkappa' \\ \varrho l_3 &= \Sigma (a_{3\varkappa} + \mu b_{3\varkappa})\, x_\varkappa'. \end{aligned}$$

Indem wir den Koefficienten μ aus diesen Gleichungen eliminieren, finden wir den Ort der Pole für die Gerade in Bezug auf die Kegelschnitte des Büschels. Derselbe wird durch die Gleichung bestimmt:

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} l_1 & \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa' & \Sigma b_{1\varkappa} x_\varkappa' \\ l_2 & \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa' & \Sigma b_{2\varkappa} x_\varkappa' \\ l_3 & \Sigma a_{3\varkappa} x_\varkappa' & \Sigma b_{2\varkappa} x_\varkappa' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung stellt bei veränderlichen Werten von (x') einen Kegelschnitt dar. Da die letzte Gleichung unabhängig von den Werten l_1, l_2, l_3 befriedigt wird, sobald die Elemente der

beiden letzten Reihen einander proportional sind, oder mit andern Worten, wenn die Gleichungen (10) erfüllt sind, so geht dieser Kegelschnitt durch die Eckpunkte des gemeinsamen Polardreiecks.

14. Der Kegelschnitt (14) wird von jeder Geraden in zwei Punkten geschnitten, speciell von der gegebenen Geraden (12) selbst. Im Büschel giebt es also zwei Kegelschnitte, für welche der Pol in die gegebene Gerade hineinfällt; diese werden von der Geraden berührt.

Eine Gerade der Ebene wird im allgemeinen von zwei Kegelschnitten eines Büschels berührt.

Wir können diesen Satz auch in folgender Form aussprechen:

Durch vier Punkte lassen sich im allgemeinen zwei Kegelschnitte legen, die eine gegebene Gerade berühren.

15. Ist α der Berührungspunkt des einen, β der des andern Kegelschnitts mit der gegebenen Geraden, so gehört β der in α an den ersten Kegelschnitt gelegten Tangente an; demnach ist β ein konjugierter Pol von α in Bezug auf den ersten Kegelschnitt. Aus demselben Grunde ist α konjugierter Pol von β für die zweite Kurve. Daher sind die Punkte α und β konjugierte Pole für die beiden Kurven und somit für alle Kegelschnitte des Büschels.

Umgekehrt sieht man auch sehr leicht, dafs, wenn die Punkte α und β konjugierte Pole in Bezug auf die Kurven des Büschels sind, sowohl die durch α als die durch β gelegte Kurve desselben von der Geraden $\alpha\beta$ berührt wird.

Auf einer Geraden liegen im allgemeinen zwei Punkte, die einander in Bezug auf den Büschel konjugiert sind.

16. Schneidet ein beliebiger Kegelschnitt des Büschels die Gerade $\alpha\beta$ in den Punkten μ und ν, so liegen die Punkte α und β, weil sie auch für diesen Kegelschnitt konjugierte Pole sind, harmonisch zu den Punkten μ und ν. Umgekehrt liegen alle Punktepaare, in denen die Kurven des Büschels von der Geraden geschnitten werden, harmonisch zu den beiden Punkten α und β; die Schnittpunkte bestimmen also eine Involution.

Die Punktepaare, in denen die Kurven eines Kegelschnittsbüschels von einer beliebigen Geraden geschnitten werden, liegen in Involution; in jedem der

beiden Hauptpunkte dieser Involution wird die Gerade von einer Kurve des Büschels berührt.

17. Man kann die einzelnen Sätze auch direkt auf analytischem Wege beweisen. Sollen die Punkte $(x' + \omega' x'')$ und $(x' + \omega'' x'')$ der durch die Punkte (x') und (x'') gelegten Geraden konjugierte Pole in Bezug auf die Kegelschnitte (3) sein, so müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \omega' x_\iota'') (x_\varkappa' + \omega'' x_\varkappa'') = 0,$$
$$\Sigma b_{\iota\varkappa} (x_\iota' + \omega' x_\iota'') (x_\varkappa' + \omega'' x_\varkappa'') = 0.$$

Diese beiden Gleichungen, die man auch in der Form schreiben kann:

$$L\omega'\omega'' + M(\omega' + \omega'') + N = 0$$
$$L'\omega'\omega'' + M'(\omega' + \omega'') + N' = 0,$$

bestimmen die Gröfsen $\omega'\omega''$ und $\omega' + \omega''$, liefern also eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln ω' und ω'' sind.

18. Damit die Punkte $(x' + \omega_1 x'')$ und $(x' + \omega_2 x'')$ dem Kegelschnitt $\Sigma(a_{\iota\varkappa} + \varrho b_{\iota\varkappa}) x_\iota x_\varkappa = 0$ angehören, müssen ω_1 und ω_2 die Wurzeln der Gleichung sein:

$$\Sigma(a_{\iota\varkappa} + \varrho b_{\iota\varkappa}) (x_\iota' + \omega x_\iota'') (x_\varkappa' + \omega x_\varkappa'') = 0.$$

Dieser Gleichung geben wir die Form:

$$(A + \varrho A')\omega^2 + 2(B + \varrho B')\omega + (C + \varrho C') = 0.$$

Daraus folgt:

$$\omega_1 + \omega_2 = -2\frac{B + \varrho B'}{A + \varrho A'}, \quad \omega_1\omega_2 = \frac{C + \varrho C'}{A + \varrho A'}.$$

Indem wir aus diesen beiden Gleichungen den Parameter ϱ eliminieren, erhalten wir eine lineare Beziehung zwischen den Gröfsen $\omega_1\omega_2$ und $\omega_1 + \omega_2$. Das ist aber nach § 22, 3 die Bedingung dafür, dafs die Punkte eine Involution bilden.

(In nachstehender Figur wird die durchgezogene Gerade von einem Kegelschnitt in α, α', von einem zweiten in β, β', einem dritten in γ, γ' u. s. w. geschnitten.)

Übungen:

1) Man suche die gemeinschaftlichen Polardreiecke zu zwei gegebenen Kegelschnitten:

a) $5x_1^2 - 14x_1x_2 + 8x_2^2 - 6x_1x_3 - 2x_3^2 = 0$
$3x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0.$

b) $7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0.$

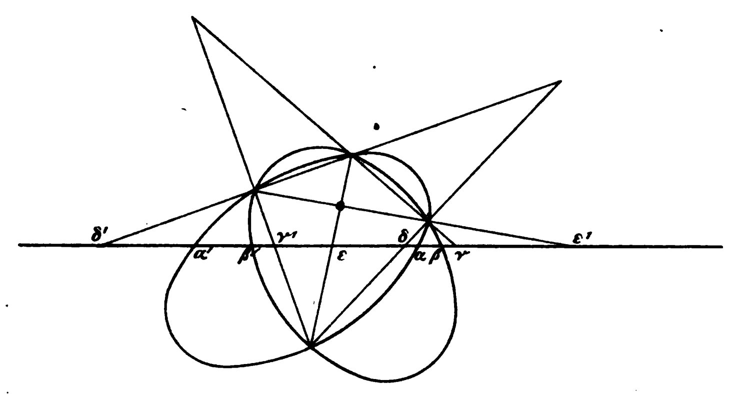


Fig. 35.

2) Für jeden der unter 1) angegebenen Kegelschnittsbüschel suche man die darin vorkommenden Geradenpaare sowie die gemeinschaftlichen Schnittpunkte. Ebenso bestimme man die Involutionen, welche durch die Kurven des Büschels auf den Koordinatenaxen erzeugt werden.

3) Zieht man in beliebig vielen Kegelschnitten eines Büschels die zu einer gegebenen Richtung parallelen Durchmesser und konstruiert zu jedem unter ihnen den konjugierten Durchmesser, so gehen die letzteren durch einen festen Punkt.

(Es seien a, b, c ... gleichgerichtete Durchmesser von Kegelschnitten eines Büschels, a und a', b und b', c und c' ... je Paare von konjugierten Durchmessern; dann ist zu beweisen, daſs a', b', c' ... durch denselben Punkt gehen.)

4) Gehören vier Kegelschnitte einem Büschel an und sind p_1, p_2, p_3, p_4 der Reihe nach die vier Polaren eines Punktes π in Bezug auf die Kurven, so ist das Doppelverhältnis dieser vier Geraden von der Wahl des Punktes π unabhängig.

(Sind $\varphi + \mu_1 \psi = 0 \ldots \varphi + \mu_4 \psi = 0$ die Gleichungen der vier Kegelschnitte, so lassen sich die Gleichungen der Polaren auf die Form bringen: $A + \mu_1 B = 0 \ldots A + \mu_4 B = 0$.)

5) Eine gerade Linie enthält im allgemeinen nur ein Paar von Punkten, die in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels konjugierte Polare sind; auf einzelnen Geraden liegen aber unendlichviele derartige Punktepaare; was sind das für Gerade?

Mit andern Worten:

Wie muſs eine Gerade zu einem Kegelschnittsbüschel liegen,

damit die sämtlichen Polaren, welche man in Bezug auf die Kurven des Büschels zu einem beliebigen Punkte der Geraden konstruieren kann, sich auf der Geraden schneiden?

6) Die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden von einer beliebigen Geraden in Punktepaaren einer Involution geschnitten.

7) a) Alle Kegelschnitte, welche durch vier feste Punkte gehen, haben ein (reelles oder imaginäres) System von parallelen konjugierten Durchmessern.

(Man beachte die beiden Involutionen, welche auf der unendlichfernen Geraden durch ihre Schnittpunkte mit den konjugierten Durchmessern von zwei Kurven des Büschels entstehen, oder wenn man lieber will, man beachte das auf dieser Geraden gelegene, für alle Kurven gemeinsame Paar konjugierter Pole.)

b) Legt man durch die vier Schnittpunkte von zwei Parabeln einen beliebigen Kegelschnitt, so bilden die durch einen Mittelpunkt gehenden Durchmesser der Parabeln ein Paar konjugierter Durchmesser desselben.

c) Jede Ellipse hat mit einem beliebigen Kegelschnitt ein reelles Paar von parallelen konjugierten Durchmessern.

(Welche Ausnahme erleidet der Satz?)

8) a) Alle Kegelschnitte, welche dasselbe Polardreieck besitzen und einen Punkt gemeinschaftlich haben, schneiden sich noch in drei weiteren Punkten.

b) Alle Kegelschnitte, welche dasselbe Polardreieck besitzen und eine gegebene Strecke harmonisch teilen, haben vier Punkte gemeinschaftlich.

c) Alle Kegelschnitte, welche durch drei feste Punkte gehen und eine gegebene Strecke harmonisch teilen, haben noch einen vierten Punkt gemein.

9) Wenn drei Kegelschnitte durch dieselben vier Punkte gehen, so wird jede gemeinsame Tangente von zweien unter ihnen durch den dritten harmonisch geteilt.

10) Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche durch vier Punkte gehen, liegen auf einem neuen Kegelschnitte, der durch die Mitten je zweier Seiten des durch die vier Punkte gebildeten vollständigen Vierecks und durch die Diagonalpunkte desselben

geht. Der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts halbiert jede Strecke, durch welche die Mittelpunkte zweier Gegenseiten mit einander verbunden werden.

§ 24.

Die Kegelschnittsschar.

1. Wenn die Gleichungen:

$$(1) \quad \varphi(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad \psi(u_1, u_2, u_3) = 0$$

zwei Kurven n^{ter} Klasse darstellen, so bilden die sämtlichen Kurven, deren Gleichung in der Form

$$(2) \quad \varphi(u) + \mu\psi(u) = 0$$

dargestellt werden kann, eine Kurvenschar n^{ter} Klasse. Statt die Schar durch die beiden Kurven (1) zu bestimmen, kann man auch von zwei beliebigen Kurven der Schar (2) ausgehen. Jede Gerade, welche zwei Kurven der Schar berührt, ist auch Tangente an alle ihre Kurven. Umgekehrt kann eine Kurvenschar n^{ter} Klasse angesehen werden als die Gesamtheit aller Kurven n^{ter} Klasse, welche mit zwei unter ihnen alle Tangenten gemeinschaftlich haben.

Jede Gerade der Ebene, welche nicht von allen Kurven der Schar berührt wird, ist Tangente an eine einzige Kurve der Schar. Wenn nämlich $\varphi(u')$ und $\psi(u')$ nicht beide verschwinden, so giebt es immer einen einzigen Wert von μ, für den

$$\varphi(u') + \mu\psi(u') = 0 \text{ ist.}$$

2. Wenn die beiden Kurven (1) von der zweiten Klasse sind, wenn sie demnach die Gleichungen haben:

$$(3) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0, \ \Sigma B_{\iota\varkappa}(u_\iota u_\varkappa) = 0,$$

so bilden die Kurven

$$(4) \quad \Sigma (A_{\iota\varkappa} + \mu B_{\iota\varkappa}) u_\iota u_\varkappa = 0$$

eine Schar von Kurven zweiter Klasse oder eine Kegelschnittsschar.

Für eine solche Schar gilt der wichtige Satz:

Wenn die Geraden (u') und (u'') konjugierte Polare in Bezug auf zwei Kurven sind, so haben sie dieselbe Eigenschaft für alle Kurven der Schar; ist dies nicht der Fall, so giebt es stets in ihr eine einzige Kurve, für welche die Geraden konjugierte Polare sind.

Sobald die Gleichungen befriedigt sind:

$$\Sigma A_{\iota x} u_\iota' u_x'' = 0, \quad \Sigma B_{\iota x} u_\iota' u_x'' = 0,$$

ist auch

$$\Sigma (A_{\iota x} + \mu B_{\iota x}) u_\iota' u_x'' = 0.$$

Werden aber die ersten Gleichungen nicht beide erfüllt, so kann man doch den Koefficienten μ so bestimmen, dafs der dritten Gleichung genügt wird.

3. Daraus ergiebt sich folgender Satz:

Die Pole einer geraden Linie in Bezug auf die Kurven einer Kegelschnittsschar liegen auf einer zweiten geraden Linie. Nur die singulären Geraden der der Schar angehörenden Punktepaare haben für alle Kurven der Schar denselben Pol. Diese geraden Linien bilden im allgemeinen die Seiten eines den Kurven gemeinsamen Polardreiecks.

Dieser Satz kann einmal auf dem in § 23, 6 angegebenen Wege erhärtet werden, indem man in der Darlegung nur Punkt und Gerade mit einander vertauscht. Indessen möchten wir diese Herleitung dem Leser überlassen und einen rein analytischen Beweis liefern.

Der Pol der Geraden (u') in Bezug auf die Kurve (4) hat die Gleichung:

$$(5) \quad \Sigma (A_{\iota x} + \mu B_{\iota x}) u_\iota u_x' = 0.$$

Diese stellt, wenn wir dem Koefficienten μ alle möglichen Werte beilegen, eine gerade Punktreihe dar, den Ort der Pole der Geraden (u').

Nur wenn die Gleichungen $\Sigma A_{\iota x} u_\iota u_x' = 0$ und $\Sigma B_{\iota x} u_\iota u_x' = 0$ denselben Punkt darstellen, ist auch die Gleichung (5) die Gleichung desselben Punktes. Dann müssen aber die Gleichungen bestehen:

$$\Sigma A_{1x} u_x' = \omega \Sigma B_{1x} u_x', \quad \Sigma A_{2x} u_x' = \omega \Sigma B_{2x} u_x',$$
$$\Sigma A_{3x} u_x' = \omega \Sigma B_{3x} u_x'.$$

Diese Gleichungen sind die Bedingung dafür, dafs die Gerade (u') singuläre Gerade der Kurve $\Sigma (A_{\iota x} - \omega B_{\iota x}) u_\iota u_x = 0$ und diese Kurve eine uneigentliche Kurve ist.

Der Schar (4) gehören im allgemeinen drei Punktepaare an, nämlich diejenigen Kurven, für welche der entsprechende Koefficient μ der Gleichung genügt:

$$(6) \quad \begin{vmatrix} A_{11}+\mu B_{11} & A_{12}+\mu B_{12} & A_{13}+\mu B_{13} \\ A_{21}+\mu B_{21} & A_{22}+\mu B_{22} & A_{23}+\mu B_{23} \\ A_{31}+\mu B_{31} & A_{32}+\mu B_{32} & A_{33}+\mu B_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Ist μ_1 eine Wurzel dieser Gleichung, so genügt die singuläre Gerade (u′) des durch die Gleichung

$$\Sigma(A_{\iota x} + \mu_1 B_{\iota x})\, u_\iota u_x = 0$$

dargestellten Punktepaares den Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} (A_{11}+\mu_1 B_{11})u_1'+(A_{12}+\mu_1 B_{12})u_2'+(A_{13}+\mu_1 B_{13})u_3' &= 0 \\ (A_{21}+\mu_1 B_{21})u_1'+(A_{22}+\mu_1 B_{22})u_2'+(A_{23}+\mu_1 B_{23})u_3' &= 0 \\ (A_{31}+\mu_1 B_{31})u_1'+(A_{32}+\mu_1 B_{32})u_2'+(A_{33}+\mu_1 B_{33})u_3' &= 0. \end{aligned}$$

Die singuläre Gerade (u″) des Punktepaares, welches zu der Wurzel μ_2 der Gleichung (6) gehört, ergiebt sich aus den Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{aligned} (A_{11}+\mu_2 B_{11})u_1''+(A_{12}+\mu_2 B_{12})u_2''+(A_{13}+\mu_2 B_{13})u_3'' &= 0 \\ (A_{21}+\mu_2 B_{21})u_1''+(A_{22}+\mu_2 B_{22})u_2''+(A_{23}+\mu_2 B_{23})u_3'' &= 0 \\ (A_{31}+\mu_2 B_{31})u_1''+(A_{32}+\mu_2 B_{32})u_2''+(A_{33}+\mu_2 B_{33})u_3'' &= 0. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (7) leiten wir durch Multiplikation mit u_1'', u_2'', u_3'' und aus (8) durch Multiplikation mit u_1', u_2', u_3' je eine neue Gleichung her; dadurch werden wir zu den Relationen geführt:

$$\Sigma(A_\iota \; + \mu_1 B_\iota \;)\, u_\iota' u \;'' = 0$$
$$\Sigma(B_\iota \; + \mu_2 B_\iota \;)\, u_\iota' u \;'' = 0.$$

Da wir voraussetzen, dafs die Gleichung (6) drei ungleiche Wurzeln hat, so sagen die letzten Gleichungen aus, dafs die Geraden (u′) und (u″) konjugierte Polare in Bezug auf zwei verschiedene, und somit in Bezug auf alle Kurven der Schar sind.

Dasselbe gilt für irgend zwei Gerade, welche singuläre Linien für je ein Punktepaar der Schar sind. Die drei singulären Geraden der in der Schar enthaltenen Punktepaare sind also die Seiten eines sich selbst konjugierten Dreiecks für alle Kurven der Schar.

4. Aus dem durchgeführten Beweise ergiebt sich der Satz: Die gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kegelschnitte gehen im allgemeinen auch durch drei Punktepaare.

Zwei dieser Punktepaare seien (1, 1′) und (2, 2′). Dann sind die vier geraden Linien, durch welche je ein Punkt des ersten Paares mit je einem Punkte des zweiten Paares verbunden wird,

nämlich die Linien (1, 2), (1, 2'), (1', 2), (1', 2') gemeinschaftliche Tangenten der beiden gegebenen Kegelschnitte. Analytische Ausdrücke erhalten wir aber auch, wenn die Punkte selbst imaginär sind. Indem wir auch imaginäre Tangenten zulassen, können wir den Satz aussprechen:

Zwei Kegelschnitte haben im allgemeinen vier Tangenten gemeinschaftlich.

5. Der Pol der Geraden (u') in Bezug auf einen bestimmten Kegelschnitt (9) hat die Gleichung:

$$\Sigma (A_{\iota\varkappa} + \mu B_{\iota\varkappa}) u_\iota u_\varkappa' = 0.$$

Damit dieser Punkt mit dem Punkte:

$$(9) \quad \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3 = 0$$

identisch wird, müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$\varrho\gamma_1 = \Sigma (A_{1\varkappa} + \mu B_{1\varkappa}) u_\varkappa'$$
$$\varrho\gamma_2 = \Sigma (A_{2\varkappa} + \mu B_{2\varkappa}) u_\varkappa'$$
$$\varrho\gamma_3 = \Sigma (A_{3\varkappa} + \mu B_{3\varkappa}) u_\varkappa'.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich im allgemeinen die Verhältnisse von u_1', u_2', u_3' eindeutig, nachdem der Koefficient μ und damit der Kegelschnitt fest gewählt ist. Lassen wir aber μ alle Werte annehmen, oder, was dasselbe ist, suchen wir die Polare des Punktes in Bezug auf alle Kurven der Schar, so erhalten wir unendlich viele Gerade, welche der Gleichung genügen:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \gamma_1 & \Sigma A_{1\varkappa} u_\varkappa' & \Sigma B_{1\varkappa} u_\varkappa' \\ \gamma_2 & \Sigma A_{2\varkappa} u_\varkappa' & \Sigma B_{2\varkappa} u_\varkappa' \\ \gamma_3 & \Sigma A_{3\varkappa} u_\varkappa' & \Sigma B_{3\varkappa} u_\varkappa' \end{vmatrix} = 0.$$

Die Geraden sind Tangenten an einen Kegelschnitt, welcher von den Seiten des gemeinsamen Polardreiecks berührt wird.

6. Von dem Punkte (9) aus kann man zwei Tangenten an den Kegelschnitt (10) legen. Diejenigen beiden Kurven der Schar, von denen je eine dieser Tangenten berührt wird, gehen durch den Punkt. Daher sind die beiden Geraden konjugierte Polare von einander in Bezug auf diese beiden und zugleich in Bezug auf alle Kurven der Schar; sie liegen also harmonisch zu jedem Paare von Tangenten, welches von dem Punkte aus an irgend eine Kurve der Schar gelegt werden kann. Alle diese Tangenten bilden eine Involution, deren Hauptstrahlen die Tangenten an diejenigen beiden Kegelschnitte sind, welche durch den Punkt gehen.

Indem wir es dem Leser überlassen, diese Sätze analytisch zu beweisen, fassen wir die Ergebnisse in folgendem Satze zusammen:

Die von einem beliebigen Punkte an die Kegelschnitte einer Schar gelegten Tangenten bilden eine Involution, deren Hauptstrahlen die Tangenten an diejenigen beiden Kurven der Schar sind, welche durch den Punkt gehen. Diese beiden Tangenten bilden ein Paar konjugierter Polaren für alle Kegelschnitte der Schar.

Daneben machen wir noch auf den folgenden Satz aufmerksam:

Die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu konstruieren, welcher vier gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, läfst im allgemeinen zwei Lösungen zu.

Übungen:

1) Man untersuche die Schar, welche durch die Kurven bestimmt ist:

$$5u_1^2 + 4u_2^2 + 3u_3^2 + 6u_1u_2 + 4u_1u_3 + 2u_2u_3 = 0$$

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_1u_2 + u_1u_3 + u_2u_3 = 0.$$

2) Eine Kegelschnittsschar enthält entweder eine einzige oder unendlichviele Parabeln.

3) Jede Gerade durch den Schnittpunkt von zwei gemeinschaftlichen Tangenten der Schar hat die Eigenschaft, dafs ihre Pole in Bezug auf die Kurven der Schar in einer durch denselben Punkt gehenden Geraden liegen;

mit andern Worten:

Die Geraden, welche durch den Schnittpunkt von zwei gemeinschaftlichen Tangenten gehen, lassen sich einander involutorisch so zuordnen, dafs die entsprechenden Geraden konjugierte Polare in Bezug auf alle Kurven der Schar sind.

4) Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche vier gerade Linien berühren, liegen auf einer Geraden, welche durch die Mitten der drei Diagonalen des von den Tangenten gebildeten Vierseits geht.

5) Die drei Paare Gegenecken eines vollständigen Vierseits werden von einem beliebigen Punkte aus in Strahlenpaaren einer Involution projiziert.

6) Die in einem Schnittpunkt zweier Kegelschnitte an sie gelegten Tangenten liegen harmonisch zu den beiden Tangenten, welche von dem Punkte aus an eine dritte Kurve der durch die beiden ersten bestimmten Schar gelegt werden können.

7) Man übertrage die in Übung 8) a), b), c) zu § 23 angegebenen Sätze.

8) Fortsetzung der Übung 4) zu § 21.

a) Wenn $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$, $\varphi_3(x) = 0 \ldots$ Gleichungen von Kurven n^{ter} Ordnung sind, so nennt man die Gesamtheit aller Kurven, welche für beliebige Konstante $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ in der Form:

$$(\alpha) \quad \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) \ldots = 0$$

dargestellt werden können, ein Linearsystem von Kurven n^{ter} Ordnung. Dabei setzen wir voraus, dafs die Gleichungen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0 \ldots$ von einander unabhängig sind, dafs z. B. φ_3 nicht auf die Form $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$, φ_4 nicht auf die Form $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3$ u. s. w. gebracht werden kann, mit andern Worten, dafs es unmöglich ist, ein System der Konstanten λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots$ derartig zu bestimmen, dafs die linke Seite von (α) identisch verschwindet. Wenn das Linearsystem durch r von einander unabhängige Kurven bestimmt ist, so sind die r Koefficienten $\lambda_1 \ldots \lambda_r$ wesentlich; demnach enthält das System eine $(r-1)$-fache Unendlichkeit von Kurven.

Ebenso setzt man aus mehreren Gleichungen, welche in Linienkoordinaten den Grad m haben, ein Linearsystem von Kurven m^{ter} Klasse zusammen.

b) Denken wir uns eine Kurve zweiter Klasse:

$$(\beta) \quad \Sigma \alpha_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$$

gegeben, so kann man fünf von einander unabhängige Kurven zweiter Ordnung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ finden, deren Koefficienten der Bedingung $\Sigma a_{\iota\varkappa} \alpha_{\iota\varkappa} = 0$ genügen. Wenn etwa $\alpha_{33} = 1$ ist, so befriedigt man die Forderung durch die Festsetzungen:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1, \; a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0, \; a_{33} = -\alpha_{11}, \\
a_{12} &= 1, \; a_{11} = a_{22} = a_{13} = a_{23} = 0, \; a_{33} = -2\alpha_{12}, \\
a_{22} &= 1, \; a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \; a_{33} = -\alpha_{22}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Demnach steht mit der gegebenen Kurve (β) in enger Beziehung das Linearsystem zweiter Ordnung:

$$(\gamma)\ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_2^2 + \lambda_4 x_1 x_3 + \lambda_5 x_2 x_3 \\ - (\lambda_1 \alpha_{11} + \lambda_2 \alpha_{12} + \lambda_3 \alpha_{22} + \lambda_4 \alpha_{13} + \lambda_5 \alpha_{23}) x_3^2 = 0.$$

Diesem System gehört jeder Kegelschnitt an, welcher einem Polardreieck der Kurve (β) umgeschrieben ist. Die Paare konjugierter Polaren der gegebenen Kurve sind die Geradenpaare des Systems, und jede Tangente von (β) ist eine Doppelgerade des Linearsystems (γ).

c) Jetzt setze man umgekehrt ein vierfach unendliches Linearsystem von Kurven zweiter Klasse in Beziehung zu einer gegebenen Kurve zweiter Ordnung.

d) Man ersetze die Kurve (β) durch ein Punktepaar oder einen Doppelpunkt und gebe dann die Eigenschaften des entsprechenden Linearsystems an. Dabei lege man die Gleichung (β) in der einfachsten Form zu Grunde.

e) Ebenso ordne man einem Geradenpaar oder einer Doppelgeraden ein System von Kurven zweiter Klasse zu.

f) Es seien die beiden Kurven gegeben:

$$(\delta)\quad \Sigma \alpha_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0, \quad \Sigma \beta_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0;$$

man soll alle diejenigen Kurven zweiter Ordnung $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$ untersuchen, deren Koefficienten den Gleichungen genügen:

$$\Sigma a_{\iota\varkappa} \alpha_{\iota\varkappa} = 0, \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} \beta_{\iota\varkappa} = 0.$$

Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dafs die durch die Kurven (δ) bestimmte Schar eine allgemeine ist. Alsdann haben diese Kurven ein gemeinsames Polardreieck. Jeder um dies Dreieck beschriebene Kegelschnitt gehört dem Linearsystem an; aber dasselbe enthält noch andere Kurven. Um alle Kegelschnitte des Systems zu finden, gehen wir von einem beliebigen Punkte π_1 aus und bestimmen zwei weitere Punkte π_2 und π_3, welche der ersten Kurve gegenüber sowohl unter einander als auch zu π_1 konjugierte Pole sind; ebenso mögen die Punkte π_1, π_2', π_3' die Ecken eines Polardreiecks der zweiten Kurve (δ) bilden; der durch die fünf Punkte π_1, π_2, π_3, π_2' und π_3' gelegte Kegelschnitt gehört dem Linearsystem an. Jeder solche Kegelschnitt ist auch unendlich vielen Polardreiecken einer jeden Kurve der Schar (δ) umbeschrieben; nimmt man auf einem Kegelschnitt des Linearsystems einen beliebigen Punkt, so schneidet denselben die Polare des Punktes in Bezug auf eine beliebige Kurve der Schar in zwei

Punkten, welche konjugierte Pole für dieselbe Kurve sind. (Man formuliere den entsprechenden Lehrsatz.)

Die Schar (δ) enthält drei Punktepaare und ist durch zwei von ihnen bestimmt. Demnach ist das der Schar (δ) entsprechende Linearsystem auch definiert als die Gesamtheit derjenigen Kurven zweiter Ordnung, für welche die Punkte zweier Paare je konjugierte Pole sind. Hiernach lassen sich die dem System angehörenden Linienpaare leicht konstruieren: Man nehme eine Gerade des Paares willkürlich, suche zu ihren Schnittpunkten mit den Verbindungsgeraden der Punkte eines Paares je den vierten harmonischen Punkt und verbinde diese Punkte durch eine neue Gerade. (Welche Besonderheiten können sich bei specieller Wahl der Geraden ergeben?)

Nachdem zwei Punktepaare der Schar (δ) gegeben sind, kann man das dritte Paar sehr einfach konstruieren. Die Punkte dieses Paars bilden auch konjugierte Pole für jeden Kegelschnitt des Systems. Sobald man zwei Paare konjugierter Pole eines Kegelschnitts kennt, kann man ein drittes Paar leicht finden.

Dem Linearsystem gehören vier Doppelgerade an, nämlich die gemeinschaftlichen Tangenten der Schar (δ).

Unter der gemachten Annahme können wir die Kurven (δ) durch dieselben drei Quadrate darstellen in der Form:

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \alpha_3 u_3^2 = 0, \quad \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2 + \beta_3 u_3^2 = 0.$$

Jetzt lassen sich drei Konstante a_1, a_2, a_3 so bestimmen, dafs das Linearsystem für beliebige Werte von λ_1, λ_2, λ_3 alle Kurven enthält, deren Gleichung ist:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + 2\lambda_1 x_2 x_3 + 2\lambda_2 x_3 x_1 + 2\lambda_3 x_1 x_2 = 0.$$

Man bestimme hiernach die Geradenpaare und die Doppelgeraden des Systems und verifiziere die oben angegebenen Sätze.

g) Man gehe umgekehrt von zwei Kurven zweiter Ordnung aus und untersuche das zugehörige Linearsystem von Kurven zweiter Klasse.

h) Es seien die drei Kurven zweiter Klasse

$$\Sigma \alpha_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0, \quad \Sigma \beta_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0, \quad \Sigma \gamma_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$$

und damit das Linearsystem

$$\sum_{\iota,\varkappa} (\mu_1 \alpha_{\iota\varkappa} + \mu_2 \beta_{\iota\varkappa} + \mu_3 \gamma_{\iota\varkappa}) u_\iota u_\varkappa = 0$$

gegeben; man soll demselben in der angegebenen Weise ein

Linearsystem $\Sigma(\lambda_1 a_{\iota\varkappa} + \lambda_2 b_{\iota\varkappa} + \lambda_3 c_{\iota\varkappa}) x_\iota x_\varkappa = 0$ zuordnen. Wir wollen annehmen, zur Bestimmung des ersten Systems seien drei Punktepaare: $(\alpha\alpha')$, $(\beta\beta')$, $(\gamma\gamma')$ gegeben; dann kann man unendlich viele weitere Punktepaare des Systems konstruieren. Die Verbindungslinie der Punkte eines solchen Paares ist die eine Gerade eines dem andern System angehörenden Geradenpaares: man ziehe z. B. die Gerade $\alpha\alpha'$ und suche zu ihren Schnittpunkten mit $\beta\beta'$ und $\gamma\gamma'$ je den vierten harmonischen Punkt in Bezug auf die Punkte des entsprechenden Paares; die Verbindungslinie der gefundenen Punkte bildet mit $(\alpha\alpha')$ ein dem zweiten System angehörendes Geradenpaar. Von jedem Punkte eines dem ersten System angehörenden Punktepaares geht ein Geradenpaar des zweiten aus. Umgekehrt enthält jede Gerade eines Geradenpaares ein Punktepaar; der singuläre Punkt eines Geradenpaares bildet mit einem zweiten Punkte ein Punktepaar des ersten Systems.

Die enge Beziehung, welche hiernach zwischen den beiden Systemen besteht, macht die Untersuchung sehr einfach und übersichtlich. Man gelangt auf diesem Wege zu einer interessanten Theorie der Kurven dritter Ordnung.

§ 25.

Ein specieller Kegelschnittsbüschel.

1. Wir haben im vorletzten Paragraphen angenommen, dafs die beiden Kegelschnitte, durch welche der Büschel bestimmt wird, eine allgemeine Lage zu einander haben, mit andern Worten, einander nicht berühren. Es liegt uns fern, eine Einteilung der Büschel vorzunehmen und dementsprechend alle Lagen zu besprechen, welche zwei Kegelschnitte gegen einander einnehmen können. Nur einen ganz speciellen Fall wollen wir einer nähern Betrachtung unterziehen, nämlich den Fall, dafs der Büschel eine Doppelgerade enthält. Indem wir die Doppelgerade mit der dritten Seite des Koordinatendreiecks zusammenfallen lassen, gehen wir von den beiden Kurven aus:

$$(1) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0, \quad x_3^2 = 0$$

und können eine beliebige Kurve des Büschels in der Form schreiben:

$$(2) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa + \mu x_3^2 = 0.$$

Wir beschränken uns auf den Fall, dafs die erste Gleichung (1) einen eigentlichen Kegelschnitt darstellt.

2. Da jeder Punkt der Linie $x_3 = 0$ in Bezug auf die Doppelgerade zu allen Punkten der Ebene konjugierter Pol ist, so ist

a) die Polare zu irgend einem Punkte dieser Geraden in Bezug auf die erste Kurve (1) Polare desselben Punktes für alle Kurven des Büschels (2);

b) der Pol der Geraden $x_3 = 0$ in Bezug auf die erste Kurve ist Pol dieser Geraden für alle Kurven.

Der in b) genannte Punkt und alle Punkte der Geraden $x_3 = 0$ haben also gemeinsame Polaren für alle Kurven des Büschels. Diese Eigenschaft kann aber keinem weiteren Punkte zukommen; denn für die Doppelgerade fällt die Polare eines jeden nicht in ihr enthaltenen Punktes mit ihr selbst zusammen.

3. Diese Sätze können wir auch leicht analytisch beweisen. Die Polare eines Punktes (x') in Bezug auf die Kurve (2) ist:

$$(3) \quad \Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa' + \mu x_3 x_3' = 0.$$

Wenn wir den Punkt (x') auf der Geraden $x_3 = 0$ annehmen, also $x_3' = 0$ setzen, so fällt der Koefficient μ ganz weg; ein solcher Punkt hat für alle Kurven des Büschels dieselbe Polare. Da man in diesem Falle die Gleichung (3) in der Form schreiben kann:

$$x_1'(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2'(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0,$$

so gehen die Polaren zu den Punkten der Geraden $x_3 = 0$ durch den Schnittpunkt der Geraden:

$$(4) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0.$$

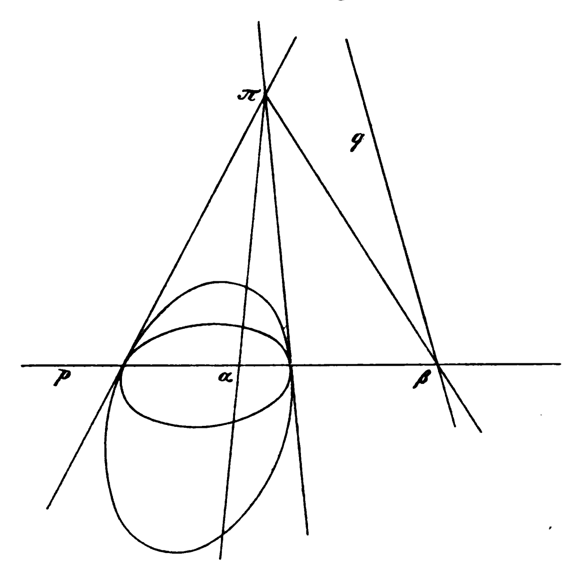
4. Wenn x_3' von null verschieden ist, so kann die Gleichung (3) nur unter der Bedingung von μ unabhängig sein, dafs die Gleichungen $x_3 = 0$ und $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa' = 0$ dieselbe Gerade darstellen. In diesem Falle müssen in der letzten Gleichung die Koefficienten von x_1 und x_2 verschwinden; es mufs daher

$$\Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa' = 0, \quad \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa' = 0$$

sein. Der Punkt (x') mufs der Schnittpunkt der Linien (4), der Pol der Geraden $x_3 = 0$ sein.

5. Wie die Gleichung (3) oder auch eine einfache Überlegung zeigt, schneiden sich die Polaren eines Punktes, falls sie nicht zusammenfallen, in einem Punkte der Doppelgeraden. Ist p die Doppelgerade, π ihr gemeinsamer Pol, μ ein beliebiger

Punkt der Ebene, β der Schnittpunkt von $\mu\pi$ mit p, α der gemeinsame Pol zu $\pi\beta$, so gehen die Polaren des Punktes μ durch den Punkt α. Dieser selbe Punkt α liegt auch in den Polaren zu



allen andern Punkten der Geraden $\pi\beta$. Umgekehrt schneiden sich die Polaren zu einem beliebigen Punkte der Geraden $\pi\alpha$ im Punkte β.

6. Die gemeinschaftliche Polare zum Punkte β für die Kurven des Büschels ist die Gerade $\alpha\pi$. Der Pol einer beliebigen durch β gehenden Geraden q in Bezug auf irgend eine Kurve des Büschels ist auch konjugierter Pol zu β selbst; er mufs daher auf der Geraden $\alpha\pi$ liegen.

Wenn die Pole einer Geraden nicht zusammenfallen, so liegen sie in einer Geraden, welche durch den Pol der Doppelgeraden hindurchgeht.

Soll diese Gerade q einen Kegelschnitt des Büschels berühren, so mufs ihr Pol in Bezug auf die berührte Kurve in q hineinfallen; der Berührungspunkt ist also der Schnittpunkt von q mit der Geraden $\alpha\pi$.

Jede Gerade der Ebene (mit Ausschlufs der gemeinschaftlichen Tangenten) wird von einer einzigen Kurve der Schar berührt.

7. Auch diese Sätze gehen sehr leicht aus der Gleichung (3) hervor. Damit der Punkt (x') der Pol der Geraden:

$$(5) \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

in Bezug auf die Kurve (2) sei, mufs sein:

$$(6) \quad \Sigma a_{1\varkappa} x_\varkappa' : \Sigma a_{2\varkappa} x_\varkappa' = b_1 : b_2.$$

Die Pole der Geraden (5) liegen also in einer Geraden, welche durch den Pol der Doppelgeraden hindurchgeht. In die Gleichung (6) tritt der Koefficient b_3 der ersten Geraden nicht ein; also enthält die gefundene Gerade (6) die Pole zu allen geraden Linien, von denen die Doppelgerade in demselben Punkte geschnitten wird.

Der Berührungspunkt der Geraden (5) mit einer Kurve des Büschels mufs nicht nur der Gleichung (6), sondern auch der Gleichung $b_1 x_1' + b_2 x_2' + b_3 x_3' = 0$ genügen; es giebt also nur einen einzigen solchen Punkt.

8. Hiernach hat der betrachtete Büschel auch die Eigenschaften einer Schar. In der That kann man die durch die Gleichung (2) bestimmte Kurve in Linienkoordinaten darstellen, indem man in der Gleichung (9) (§ 14, 10 S. 89) den Koefficienten a_{33} durch $a_{33} + \mu$ ersetzt. Auch in diese Gleichung tritt μ nur linear ein; die neue Gleichung stellt also eine Kurvenschar dar.

9. Falls die Gerade $x_3 = 0$ die erste Kurve (1) nicht berührt, gehört der gemeinschaftliche Pol dieser Linie ihr nicht an. Die Kurven des Büschels haben mit der Geraden $x_3 = 0$ dieselben beiden (reellen oder imaginären) Punkte und in ihnen die Tangenten gemeinschaftlich; sie gehen eine doppelte Berührung ein.

Gehört der Punkt α auf der Doppelgeraden (Fig. S. 168) der ersten Kurve (1) nicht an, so geht die gemeinsame Polare $\pi\beta$ desselben durch ihn nicht hindurch. Da jetzt auch $\pi\alpha$ die gemeinschaftliche Polare des Punktes β ist, so ist das Dreieck $\pi\alpha\beta$ Polardreieck zu allen Kurven des Büschels. Der Büschel besitzt unendlich viele gemeinsame Polardreiecke. Wählt man ein solches zum Koordinatendreieck, so ist die Gleichung der ersten Kurve:

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 = 0,$$

wo $y_3 = x_3$ ist. Demnach kann man den Büschel auch in der Form darstellen:

$$(7) \quad \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \nu y_3^2 = 0,$$

wo $\alpha_3 + \mu = \nu$ gesetzt ist. In Linienkoordinaten wird diese Gleichung:

$$\frac{v_1^2}{\alpha_1} + \frac{v_2^2}{\alpha_2} + \varrho v_3^2 = 0,$$

wo $\varrho = \frac{1}{\nu}$ sein soll.

10. Wenn die Gerade $x_3 = 0$ die erste Kurve berührt, kann man die Gleichung derselben auf unendlich verschiedene Weisen auf die Form bringen:

$$y_2^2 + 2a y_1 y_3 = 0.$$

Dadurch geht die Gleichung des Büschels über in

$$(8) \quad y_2^2 + 2\alpha y_1 y_3 + \mu y_3^2 = 0.$$

Die Kurven berühren einander im Punkte (1, 0, 0) und haben keinen weiteren Punkt gemeinschaftlich. Wir dürfen uns denken, dafs in diesem Punkte sich die vier Schnittpunkte vereinigt hätten.

Dem Büschel gehört aufser der Doppelgeraden kein Linienpaar an; auch giebt es aufser den Punkten dieser Geraden keinen Punkt, für den die Polaren zusammenfallen.

11. Besonders wichtig wird der Büschel (2), wenn die Doppelgerade mit der unendlichfernen Geraden zusammenfällt. Dann gehen die Brüche $x_2 : x_3$ und $x_1 : x_3$ in die Cartesischen Koordinaten x, y über. Wenn jetzt zunächst die unendlichferne Gerade nicht alle Kurven des Büschels berührt, so dürfen wir die Gleichung (7) in der Form

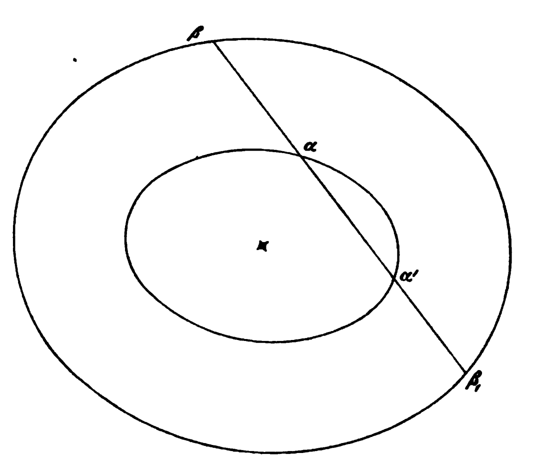
$$(9) \quad \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = \mu$$

zu Grunde legen, wo α und β feste Werte haben. Aus dieser Gleichung geht hervor, dafs die Kurven nicht blofs den Mittelpunkt, sondern auch die Richtungen aller Paare konjugierter Durchmesser gemeinschaftlich haben. Auch haben entsprechende Durchmesser für je zwei Kurven dasselbe Verhältnis. Wir sagen daher, alle diese Kurven seien ähnlich und koaxial.

Einem beliebigen Punkte der Ebene ist in Bezug auf alle Kurven des Büschels derselbe unendlichferne Punkt als gemeinsamer Pol zugeordnet; es ist dies der unendlichferne Punkt desjenigen Durchmessers, der zu dem durch den gegebenen Punkt gehenden Durchmesser konjugiert ist. Auf der Geraden, durch welche der gegebene Punkt mit seinem gemeinsamen Pole ver-

bunden wird, liegen diese beiden Punkte harmonisch in Bezug auf die Schnittpunkte mit irgend einer Kurve des Systems; der gegebene Punkt ist die Mitte für alle Sehnen, welche in dieser Geraden liegen.

Umgekehrt enthält jede Gerade, die nicht durch den Mittelpunkt der Kurven geht, ein Paar gemeinschaftlicher konjugierter Pole, von denen der eine unendlichfern liegt. Also haben alle Sehnen, die in einer beliebigen geraden Linie liegen, dieselbe Mitte. Zwischen zwei verschiedenen Kurven des Büschels werden auf einer jeden Geraden gleiche Strecken begrenzt; wenn die Gerade von der einen Kurve in α und α', von der andern in β und β' geschnitten wird, so ist



$$\alpha\beta' = \alpha'\beta,$$
$$\alpha\beta = \alpha'\beta'.$$

Jede Gerade wird von einer Kurve des Büschels berührt; der Berührungspunkt ist die Mitte für alle in der Geraden liegenden Sehnen.

Zu einer jeden Geraden, die nicht durch den Mittelpunkt geht, giebt es eine gemeinsame Polare. Ist g eine beliebige Gerade der Ebene, g' der zu ihr parallele und h der zu g' konjugierte Durchmesser, so liegen alle Pole von g auf dem Durchmesser h.

12. Wenn die Koefficienten α und β der Gleichung (9) beide positiv sind, so stellt dieselbe für positive Werte von μ eine Ellipse, für negative eine imaginäre Kurve dar. Ist dagegen α positiv, β negativ, so genügen der Gleichung nur Hyperbeln mit gemeinschaftlichen Asymptoten; nur für $\mu = 0$ geht die Kurve in das Asymptotenpaar selbst über. Für einen positiven Wert von μ ist die x-Axe die reelle, für einen negativen Wert die imaginäre Axe.

Wenn man den einen von zwei ähnlichen und koaxialen Kegelschnitten beliebig bewegt, so bleiben die Kurven ähnlich. Wir dürfen daher sagen:

Eine Kurve, die zu einer Ellipse ähnlich ist, ist entweder ebenfalls eine Ellipse oder ein imaginärer Kegelschnitt; zu einer Hyperbel sind nur Hyperbeln mit gleichem Asymptotenwinkel ähnlich.

13. An letzter Stelle betrachten wir die Gleichung:

$$y^2 - 2ax + \mu = 0 \quad \text{oder} \quad y^2 = 2a(x + \nu).$$

Diese Gleichung stellt für einen beliebigen Wert von ν eine Parabel mit dem Parameter a dar. Denkt man sich eine Parabel des Büschels parallel so verschoben, dafs die Axe in Deckung mit ihrer Anfangslage bleibt, so gelangt man zu allen Kurven des Büschels.

Übungen:

1) Wenn zwei Kegelschnitte in doppelter Berührung sind, so wird das zwischen dem Berührungspunkte und dem Schnittpunkte mit der gemeinschaftlichen Sehne gelegene Stück einer Tangente des einen durch den andern harmonisch geteilt.

(Im Punkte α des einen Kegelschnitts werde an ihn eine Tangente gelegt, welche die gemeinsame Sehne in β, den andern Kegelschnitt in γ und δ trifft; die Punkte γ und δ liegen zu α und β harmonisch.)

2) a) Schneidet eine Gerade eine Hyperbel in den Punkten α und α', ihre Asymptoten in β und β', so ist $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, $\alpha\beta' = \alpha'\beta$.

(Die Asymptoten bilden ein Geradenpaar, welches in dem obigen Sinne zu der Hyperbel ähnlich ist.)

b) Das zwischen den Asymptoten gelegene Stück einer Tangente wird im Berührungspunkte halbiert.

c) Man konstruiere beliebig viele Punkte einer Hyperbel, von der die Asymptoten und ein Punkt gegeben sind.

d) Man soll die zweite Asymptote einer Hyperbel finden, von der die eine Asymptote und drei Punkte gegeben sind.

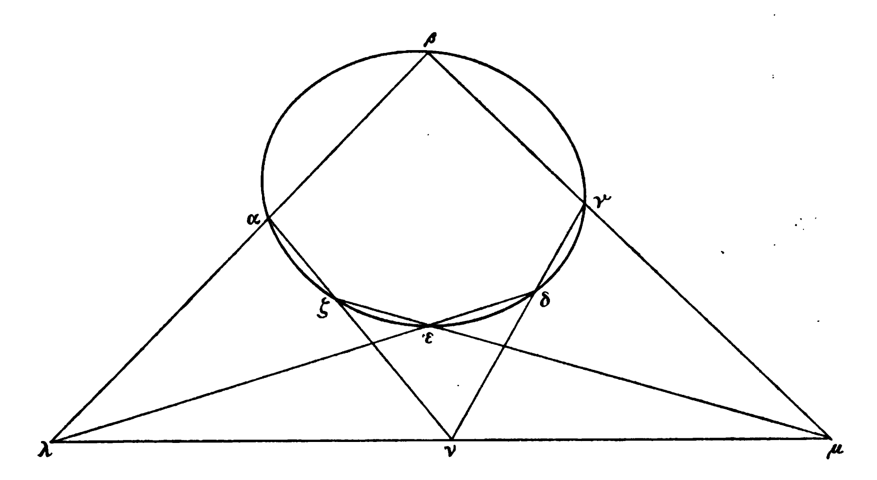
§ 26.

Der Pascalsche Satz.

1. Wie wir gesehen haben, ist ein Kegelschnitt durch fünf Punkte bestimmt; zwischen sechs seiner Punkte mufs also eine

gewisse Beziehung bestehen. Diese aufzusuchen soll unsere Aufgabe sein.

Die sechs Punkte seien α, β, γ, δ, ε, ζ. Alle Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte α, β, γ, δ hindurchgehen, bilden einen Büschel, der durch zwei dieser Kurven bestimmt wird. Zu diesen Kurven wählen wir die Geradenpaare $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ und $\alpha\delta$, $\beta\gamma$.



Nun wollen wir die Gleichung einer Geraden symbolisch durch Angabe zweier Punkte bezeichnen, welche in der Geraden liegen. Alsdann sind die Gleichungen der beiden Geradenpaare $\alpha\beta \,.\, \gamma\delta$ und $\alpha\delta \,.\, \beta\gamma$. Dem durch diese beiden Geradenpaare bestimmten Büschel gehört auch die gegebene Kurve an; somit hat ihre Gleichung die Form:

$$\alpha\beta \,.\, \gamma\delta + \mathrm{k} \,.\, \alpha\delta \,.\, \beta\gamma = 0.$$

Man kann aber den linearen Ausdruck, durch deren Verschwinden eine gerade Linie dargestellt wird, mit einer beliebigen Konstanten multiplizieren; daher kann man der Gleichung die specielle Gestalt geben:

$$(1) \quad \alpha\beta \,.\, \gamma\delta = \alpha\delta \,.\, \beta\gamma.$$

Unsere Kurve geht auch durch die Punkte δ, ε, ζ, α; man kann daher ihre Gleichung auch in der Form schreiben:

$$(2) \quad \delta\varepsilon \,.\, \zeta\alpha = \varepsilon\zeta \,.\, \alpha\delta.$$

Die Gleichungen (1) und (2) sollen nicht nur dieselbe Kurve darstellen; wir können auch durch Multiplikation mit geeigneten

Konstanten bewirken, dafs sie vollständig identisch werden. Dann ergiebt sich durch Subtraktion eine neue Gleichung, welche für alle Koordinatenwerte befriedigt wird; es ist dies die Gleichung:

$$(3) \quad \alpha\beta \,.\, \gamma\delta - \delta\varepsilon \,.\, \zeta\alpha = \alpha\delta \,.\, (\beta\gamma - \varepsilon\zeta).$$

Die linke Seite dieser Gleichung wird gleich null

a) für die Punkte α und δ,

b) für den Schnittpunkt λ der Geraden $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$,

c) für den Schnittpunkt ν der Geraden $\gamma\delta$ und $\zeta\alpha$.

Für diese Punkte mufs auch die rechte Seite verschwinden. Die Punkte λ und ν liegen aber nicht in der Geraden $\alpha\delta$; folglich müssen sie der Geraden $\beta\gamma - \varepsilon\zeta$ angehören. Diese Gerade geht aber durch den Schnittpunkt μ der Geraden $\beta\gamma$ und $\varepsilon\zeta$. Folglich liegen die drei Punkte λ, μ, ν in gerader Linie.

Für das Sechseck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ sind die Seiten $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$, $\beta\gamma$ und $\varepsilon\zeta$, $\gamma\delta$ und $\zeta\alpha$ je gegenüberliegende Seiten. Unsere Untersuchung hat uns also auf den berühmten Pascalschen Satz geführt:

Die drei Durchschnittspunkte der Paare von Gegenseiten eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseckes liegen in einer geraden Linie.

2. Ein Sechseck, dessen Gegenseiten sich paarweise in drei Punkten einer geraden Linie schneiden, heifst ein Pascalsches Sechseck; die Gerade, in welcher die Schnittpunkte der Paare von Gegenseiten liegen, wird die zugehörige Pascalsche Linie genannt. Wir sprechen den soeben gefundenen Satz auch in folgender Weise aus:

Sechs Punkte können nur dann auf einem Kegelschnitt liegen, wenn sie die Eckpunkte eines Pascalschen Sechseckes bilden.

3. Dieser Satz dient dazu, beliebig viele Punkte eines durch fünf Punkte gehenden Kegelschnitts auf linearem Wege zu bestimmen. Durch die fünf Punkte α, β, γ, δ, ε ist auch der Punkt λ bestimmt; nachdem die Gerade $\varepsilon\zeta$ beliebig gewählt ist, kennt man den Punkt μ durch den Schnitt mit $\beta\gamma$. Der Punkt ν ist der den Geraden $\lambda\mu$ und $\gamma\delta$ gemeinschaftliche Punkt; der Schnittpunkt von $\alpha\nu$ und $\varepsilon\mu$ liefert den gesuchten Punkt ζ.

Man kann auch in jedem der gegebenen Punkte die Tangente an die Kurve legen. Soll z. B. der Punkt ζ dem Punkte ε immer näher kommen, so fällt $\alpha\zeta$ immer mehr mit $\alpha\varepsilon$ zusammen; der

Punkt λ ist durch die Geraden $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$, der Punkt ν durch $\alpha\zeta$ ($=\alpha\varepsilon$) und $\gamma\delta$ bestimmt. Demnach findet man μ durch den Schnitt der Geraden $\beta\gamma$ und $\lambda\nu$, und die Gerade $\varepsilon\mu$ ist die Tangente in ε.

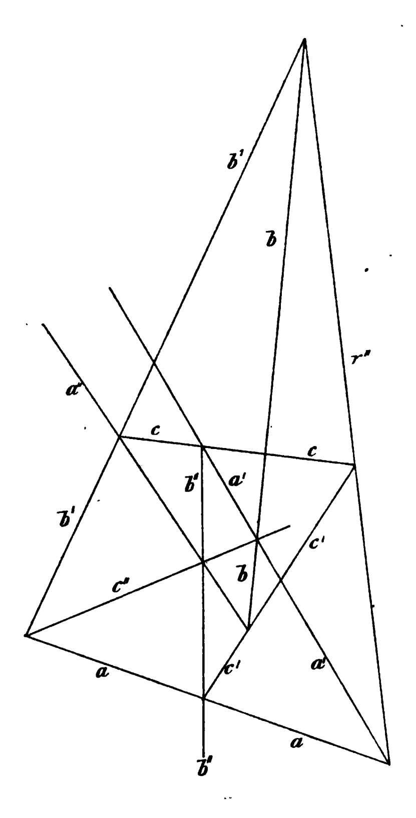
4. Wir haben vorhin nur angenommen, dafs die sechs Punkte α, β, γ, δ, ε, ζ auf einem Kegelschnitte liegen. Zu der Pascalschen Geraden $\lambda\mu\nu$ sind wir aber gelangt, indem wir die Punkte in der Reihenfolge α, β, γ, δ, ε, ζ zu einem Sechseck verbanden. Bei Änderung der Reihenfolge ändern sich die Pascalschen Sechsecke und die Pascalschen Linien; aber der Kegelschnitt bleibt ungeändert. Alle Sechsecke, welche aus einem Pascalschen Sechseck durch Umänderung der Reihenfolge der Eckpunkte hergeleitet werden können, sind ebenfalls Pascalsche Sechsecke. Zwischen den Seiten und den Pascalschen Linien all dieser Sechsecke müssen überaus zahlreiche Beziehungen statthaben, und alle diese müssen blofse Folgerungen daraus sein, dafs ein einziges dieser Sechsecke ein Pascalsches ist. Aus diesem Grunde nennt man ein solches Sechseck auch ein Hexagrammum mysticum.

5. Die Zahl der Sechsecke, welche dieselben sechs Eckpunkte besitzen, beträgt sechzig. Bei der Bezeichnung eines Sechsecks können wir von einem beliebigen Punkte ausgehen und dann die übrigen Punkte noch in zwei einander entgegengesetzten Folgen an einander reihen. Da wir in unserm Falle stets den Punkt α an die erste Stelle setzen können und dann die Bezeichnungen $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ und $\alpha\zeta\varepsilon\delta\gamma\beta$ dasselbe Sechseck liefern, hat man, um die verschiedenen Sechsecke zu finden, die Permutationen der fünf Marken β, γ, δ, ε, ζ zu bilden und entgegengesetzte Folgen nicht zu unterscheiden. Somit ist die Zahl der verschiedenen Sechsecke gleich sechzig; ebenso grofs mufs die Zahl der zugehörigen Pascalschen Linien sein.

Die vollständige Figur, zu der sechs Punkte eines Kegelschnitts gehören, enthält sechzig Sechsecke und sechzig Pascalsche Linien. Wir wollen nur einige besonders einfache Eigenschaften dieser Figur herleiten.

6. Damit die sechs geraden Linien a, b', c, a', b, c' in der angegebenen Folge ein Pascalsches Sechseck bilden, müssen sich die drei Geradenpaare a und a', b und b', c und c' in drei Punkten einer Pascalschen Linie schneiden. Die Reihenfolge der Eckpunkte

sei 1, 2, 3, 4, 5, 6; die Seite 12 werde mit a, 23 mit b', 34 mit c, 45 mit a', 56 mit b, 61 mit c' bezeichnet.



Um die Untersuchung zu erleichtern, führen wir kurze Symbole ein. So möge die Gerade a die Gleichung haben:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0;$$

dann soll das Zeichen a die linke Seite dieser Gleichung bedeuten. Die entsprechenden Symbole führen wir bei den übrigen geraden Linien ein. Da wir zudem die Gleichung einer Geraden mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren können, dürfen wir die Forderung, dafs die Geradenpaare a und a', b und b', c und c' sich auf der Geraden r'' schneiden, durch die Gleichungen ausdrücken:

$$\begin{aligned} a - a' &= r'' \\ b - b' &= r'' \qquad (4) \\ c - c' &= r''. \end{aligned}$$

Wir führen jetzt eine neue Gerade ein durch die Gleichung: $-a'' = b + c'$.

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nach (4) auch gleich $(r'' + b') + (c - r'') = b' + c$.

Indem wir in ähnlicher Weise die Symbole b'' und c'' einführen, erhalten wir die sechs Gleichungen:

$$(5) \quad a'' + b + c' = 0, \; a + b' + c'' = 0, \; a' + b'' + c = 0.$$

$$(6) \quad a'' + b' + c = 0, \; a' + b + c'' = 0, \; a + b'' + c' = 0.$$

Die Gerade a'' geht hiernach durch den Schnitt der Geraden b und c' und den der Geraden b' und c; sie ist also die Gerade 36. Ebenso stellt b'' die Gerade 25 und c'' die Gerade 14 dar. Es sind dies die geraden Linien, welche je einen Eckpunkt mit dem

gegenüberliegenden Eckpunkt des Sechsecks verbinden. Man bezeichnet diese Linien vorzugsweise als die Diagonalen des Sechsecks.

7. Die drei Seiten a, b, c des gegebenen Sechsecks mögen mit den Diagonalen a'', b'', c'' in der Reihenfolge a, b'', c, a'', b, c'' zu einem neuen Sechseck verbunden werden. Dies hat dieselben Eckpunkte, wie das ursprüngliche, nur in der Folge 1, 2, 5, 6, 3, 4. Wir wollen nachweisen, dafs auch das neue Sechseck ein Pascalsches ist.

Zu dem Ende leiten wir durch Subtraktion der dritten Gleichung (6) von der ersten Gleichung (5) die Beziehung her:

$$a'' - a = b'' - b.$$

Ebenso führt die Subtraktion der zweiten Gleichung (6) von der dritten Gleichung (5) aut die Relation:

$$b'' - b = c'' - c.$$

Demnach dürfen wir setzen:

$$\begin{aligned} r' &= a'' - a \\ (7) \quad r' &= b'' - b \\ r' &= c'' - c. \end{aligned}$$

Die Gerade r' ist also die Pascalsche Linie für das Sechseck 1, 2, 5, 6, 3, 4.

Die Geraden a'', b', c'', a', b'', c' führen in dieser Reihenfolge auf das Sechseck 163254. Da durch Subtraktion der zweiten Gleichung (6) von der ersten Gleichung (5) und der dritten Gleichung (6) von der zweiten Gleichung (5) folgt:

$$a' - a'' = b' - b'' = c' - c'',$$

so dürfen wir setzen

$$(8) \quad r = a' - a'' = b' - b'' = c' - c''.$$

Das neue Sechseck hat also die Gerade r zur Pascalschen Linie. Nun ist offenbar:

$$(a - a') + (a' - a'') + (a'' - a) = 0, \text{ oder}$$

$$(9) \quad r + r' + r'' = 0.$$

Die drei auf diese Weise zusammengehörigen Pascalschen Linien gehen also durch einen Punkt, einen sogenannten Steinerschen Punkt.

Wir fassen diese Ergebnisse in folgendem Satze zusammen:

Verbindet man mit den Diagonalen eines Pascalschen Sechsecks einmal die geraden und dann die ungeraden

Seiten in der Weise zu neuen Sechsecken, dafs man stets auf eine Seite eine Diagonale und auf eine Diagonale eine Seite folgen läfst, so erhält man zwei neue Pascalsche Sechsecke mit denselben Eckpunkten. Die zu diesen drei Sechsecken gehörenden Pascalschen Geraden gehen durch einen Punkt, einen Steinerschen Punkt.

Zu der vollständigen Figur eines Pascalschen Sechsecks gehören zwanzig Steinersche Punkte.

8. Die vorhin eingeführten Symbole sind sehr geeignet, uns einen neuen Beweis des Pascalschen Satzes zu liefern. Man denke sich die vier linearen Formen a, b, c, r'' willkürlich gegeben und führe vermittelst der Gleichungen (4) die linearen Ausdrücke a', b', c' ein.

Der durch die Gleichung:

$$(10)\quad r''r'' - r''(a + b + c) + bc + ca + ab = 0$$

dargestellte Kegelschnitt trifft die Gerade $a = 0$ in den beiden Punkten, deren Koordinaten der Gleichung genügen:

$$(r'' - b)(r'' - c) = 0 \text{ oder } b'c' = 0.$$

Daher geht dieser Kegelschnitt durch den Schnittpunkt von (a, b') und von (a, c'). In gleicher Weise zeigt man, dafs die Kurve durch die Schnittpunkte von (b, a') und von (b, c'), sowie von (c, a') und von (c, b') geht; auf dem Kegelschnitte liegen also die sechs Eckpunkte des oben betrachteten Sechsecks.

Durch die sechs Eckpunkte eines Pascalschen Sechsecks läfst sich ein Kegelschnitt legen.

9. Fünf beliebige Punkte bestimmen einen Kegelschnitt eindeutig. Sucht man den Kegelschnitt, welcher durch fünf Eckpunkte des soeben betrachteten Sechsecks hindurchgeht, so mufs seine Gleichung mit (10) identisch sein. Da diese Kurve aber auch den sechsten Eckpunkt enthält, gilt der Satz:

Ein Kegelschnitt, welcher durch fünf Eckpunkte eines Pascalschen Sechsecks hindurchgeht, enthält auch den sechsten Eckpunkt.

Es dürfte sich empfehlen, folgende Betrachtung beizufügen. Denken wir uns die fünf Punkte 6, 1, 2, 3, 4 und die Gerade (4, 5) gegeben, so liefert die Verbindung der Punkte 6, 1 die Gerade a, die der Punkte 2, 3 die Gerade b und die Gerade 4, 5

möge mit c identisch sein. Die Gerade (1, 2) sei b', die (3, 4) sei a'. Durch den Schnittpunkt von a und a', sowie von b und b' wird je ein Punkt von r'' gegeben. Somit sind die Geraden a, b, c, r'' und der Kegelschnitt (10) gegeben. Jetzt erhalten wir durch die dritte Gleichung (4) die Gerade c' und dadurch den Punkt 5.

Übungen:

1) Wenn sich ein Dreieck so verändert, dafs seine Seiten durch drei feste Punkte gehen und zwei Eckpunkte in vorgeschriebenen Geraden liegen, so beschreibt der dritte Eckpunkt einen Kegelschnitt.

(Vom Dreieck $\mu\nu\zeta$ dreht sich die Seite $\mu\nu$ um λ, die Seite $\mu\zeta$ um ε und die Seite $\nu\zeta$ um α, während sich der Punkt μ in der Geraden $\beta\gamma$, der Punkt ν in $\gamma\delta$ bewegt.)

2) Man soll den Mittelpunkt eines durch fünf Punkte gehenden Kegelschnitts konstruieren.

(Sind α, β, γ, δ, ε die fünf Punkte, so kann man den zweiten Schnittpunkt der durch ε zu $\beta\gamma$ gelegten Parallelen finden; dann kennt man zwei parallele Sehnen und somit einen Durchmesser. Eine andere Reihenfolge der Punkte liefert einen zweiten Durchmesser.)

3) a) Man kennt von einer Hyperbel vier Punkte und die Richtung einer Asymptote; man soll weitere Punkte finden.

b) Von einer Hyperbel sind drei Punkte und die Richtungen der Asymptoten gegeben; man soll weitere Punkte und den Mittelpunkt konstruieren.

4) a) Beliebig viele Punkte eines Kegelschnitts zu finden, von dem vier Punkte und die Tangente in einem unter ihnen gegeben sind.

b) Von einer Parabel kennt man drei Punkte und die Richtung der Durchmesser; man soll weitere Punkte finden.

c) Von einer Hyperbel kennt man drei Punkte und eine Asymptote; beliebig viele andere Punkte zu finden.

5) a) Man konstruiere einen Kegelschnitt aus zwei Tangenten, ihren Berührungspunkten und einem weiteren Punkte.

b) Von einer Parabel kennt man die Richtung der Durchmesser, zwei Punkte und die Tangente in einem von ihnen.

c) Von einer Hyperbel sind die Asymptoten und ein Punkt gegeben.

6) Durch einen Punkt π ziehe man zwei beliebige Gerade an einen Kegelschnitt, von denen die eine in α und β, die andere in γ und δ schneidet; in α vereinige man die beiden Punkte 1 und 2, in β die Punkte 4 und 5 eines Pascalschen Sechsecks, von dem γ und δ zwei weitere Eckpunkte (3 und 6) sein sollen. Dann schneiden sich die Tangenten in α und β, die Geraden $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, sowie $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$ in drei Punkten einer Geraden, welche sowohl zu α, β, π, wie zu γ, δ, π den vierten harmonischen Pol enthält und demnach von der Wahl der Punkte γ und δ unabhängig ist. Auf diese Betrachtung kann man die Polarentheorie rein geometrisch aufbauen.

7) In einen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch drei gegebene Punkte gehen.

(Um durch geometrische Betrachtungen am leichtesten zur Konstruktion zu gelangen, ist es angebracht, folgende Erwägung anzustellen. Von zwei beliebigen Dreiecken, die in einen Kegelschnitt einbeschrieben sind, schneiden sich entsprechende Seiten je in einem Punkte. Demnach lassen sich auch umgekehrt in einen Kegelschnitt zwei Dreiecke (1, 2, 3) und (4, 5, 6) so legen, dafs die Seiten 23 und 56 durch A, 31 und 64 durch B, 12 und 45 durch C gehen. Da demnach 123456 ein Pascalsches Sechseck ist, mufs der Schnittpunkt der Geraden 34 und 61 auf AC liegen. Es sei L der Schnittpunkt von 25 und 36, M der von 36 und 14, N der von 14 und 25; nach dem Bewiesenen liegt auf AC der Pol von BM, oder BM geht durch den Schnittpunkt der Polaren von A und von C. Demnach sucht man die Polaren a, b, c zu den Punkten A, B, C; wenn b und c einander in D, c und a in E, a und b in F, wenn DA und EF einander in L, EB und FD in M, FC und DE in N schneiden, so liefert der Schnitt von LM mit der Kurve die Punkte 3 und 6 u. s. w.

Man begründe diese Konstruktion analytisch.)

§ 27.

Der Brianchonsche Satz.

1. Indem wir a, b', c, a', b, c' als die auf einander folgenden Seiten eines Pascalschen Sechsecks (ab'), (b'c), (ca'), (a'b), (bc'),

(c'a) ansehen, bilden die Eckpunkte der Dreiecke (a, b, c) und (a', b', c') ein neues Sechseck. Um eine merkwürdige Eigenschaft dieser Figur zu finden, ziehen wir aus den Gleichungen (4) des vorigen Paragraphen die Folgerungen (vgl Fig. S. 173):

$$b - c = b' - c', \quad c - a = c' - a', \quad a - b = a' - b'.$$

Indem wir also setzen:

$$(1) \quad b - c = \varrho, \quad c - a = \varrho', \quad a - b = \varrho'',$$

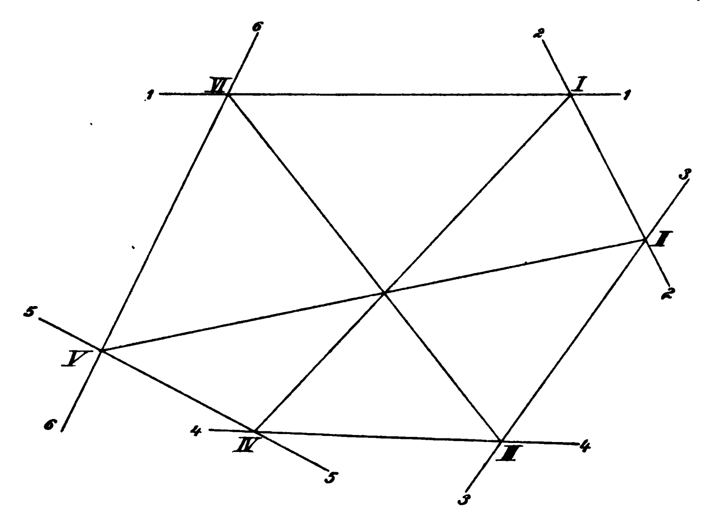
folgt:

$$(2) \quad b' - c' = \varrho, \quad c' - a' = \varrho', \quad a' - b' = \varrho'',$$

$$(3) \quad \varrho + \varrho' + \varrho'' = 0.$$

Nach den Gleichungen (1) und (2) geht die Gerade $\varrho = 0$ durch den Schnittpunkt der Geraden b und c und den der Geraden b' und c'; ebenso verbindet die Gerade $\varrho' = 0$ die Punkte (c, a) und (c', a'), die Gerade $\varrho'' = 0$ die Punkte (a, b) und (a', b'). Indem wir die Eckpunkte des Dreiecks (a, b, c) als die drei ersten, die des Dreiecks (a', b', c') als die drei letzten Eckpunkte eines Sechsecks ansehen, hat dies die Eigenschaft, dafs die Diagonalen ϱ, ϱ', ϱ'' durch einen Punkt gehen. Es empfiehlt sich aber, von dieser Figur nicht die Eckpunkte, sondern die Seiten zu betrachten, weil sie dann die reciproke Figur zu einem Pascalschen Sechseck bildet; sie heifst ein Brianchonsches Sechsseit.

Ein solches Sechsseit wird durch die beifolgende Figur dargestellt. Hier schneiden sich die Geraden 1 und 2 in I, die



Geraden 2 und 3 in II, 3 und 4 in III u. s. w., und es gehen die Geraden I IV, II V und III VI durch einen Punkt.

2. Wie die Eckpunkte eines Pascalschen Sechsecks auf einem Kegelschnitte liegen, so berühren die sechs Seiten eines Brianchonschen Sechsseits auch einen Kegelschnitt. Man kann die für den Pascalschen Satz gelieferten Beweise unmittelbar übertragen, indem man die Bedeutung der Zeichen verändert. Diesen Gedanken wollen wir für die mitgeteilten Beweise durchführen. Es seien α, β, γ, δ, ε, ζ sechs gerade Linien; das Zeichen $\alpha\beta$ soll das Symbol für einen in den Koordinaten u_1, u_2, u_3 homogenen linearen Ausdruck sein, dessen Verschwinden die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden α und β darstellt. In gleicher Weise sollen die Symbole $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\alpha\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$, $\zeta\alpha$ eingeführt werden. Wir betrachten einen Kegelschnitt, der von den sechs gegebenen Linien berührt worden, und wollen seine Gleichung in verschiedener Weise mittelst der eingeführten Symbole darstellen.

Da der Kegelschnitt durch die Geraden α, β, γ, δ berührt wird, gehört er der Kurvenschar an, welche durch die Punktepaare $(\alpha\beta)$, $(\gamma\delta)$ und $(\alpha\delta)$, $(\beta\gamma)$ bestimmt wird. Demnach kann die Gleichung des Kegelschnitts in Linienkoordinaten auf die Form gebracht werden:

$$(3) \quad \alpha\beta \cdot \gamma\delta = \alpha\delta \cdot \beta\gamma.$$

Nun berührt der Kegelschnitt auch die vier Geraden δ, ε, ζ, α; also hat seine Gleichung auch die Form:

$$(4) \quad \delta\varepsilon \cdot \zeta\alpha = \alpha\delta \cdot \varepsilon\zeta.$$

Durch passende Wahl der in den linearen Formen vorkommenden konstanten Faktoren kann man bewirken, dafs die Gleichungen (3) und (4) auch in allen Koefficienten übereinstimmen. Demnach mufs ihre Differenz identisch verschwinden; oder es besteht für beliebige Wertsysteme (u_1, u_2, u_3) die Gleichung:

$$(5) \quad \alpha\beta \cdot \gamma\delta - \delta\varepsilon \cdot \zeta\alpha = \alpha\delta \cdot (\beta\gamma - \varepsilon\zeta).$$

Für die Verbindungslinie der Punkte $(\alpha\beta)$ und $(\delta\varepsilon)$ verschwindet die linke Seite; also mufs für diese Gerade auch die rechte Seite null werden. Auf der rechten Seite kann aber der Faktor $\alpha\delta$ für diese Gerade nicht verschwinden, weil dieselbe nicht durch den Punkt $(\alpha\delta)$ hindurchgeht; somit verschwindet der Faktor $\beta\gamma - \varepsilon\zeta$, oder die Verbindungslinie der Punkte $(\alpha\beta)$ und $(\delta\varepsilon)$ geht durch denjenigen Punkt der Geraden $(\beta\gamma) \ldots (\varepsilon\zeta)$, welcher

symbolisch durch die Gleichung $\beta\gamma - \varepsilon\zeta = 0$ dargestellt wird. Man zeigt aber auf die hier durchgeführte Weise, dafs auch die Verbindungslinie der Punkte $\gamma\delta$ und $\zeta\alpha$ durch den Punkt $\beta\gamma - \varepsilon\zeta = 0$ hindurchgeht.

Somit gehen die Verbindungslinien der Punktepaare $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$, $\beta\gamma$ und $\varepsilon\zeta$, $\gamma\delta$ und $\zeta\alpha$ durch denselben Punkt hindurch.

Irgend sechs Tangenten eines Kegelschnitts bilden ein Brianchonsches Sechsseit.

3. Um einen zweiten Beweis zu liefern, verstehen wir unter a, b, c, r vier homogene lineare Formen von u_1, u_2, u_3. Setzt man noch

$$(5) \quad a - r = a', \; b - r = b', \; c - r = c',$$

so gehen die Verbindungslinien der Punkte a und a', b und b', c und c' durch denselben Punkt r. Somit sind die Punkte a, b', c, a', b, c' die sechs Eckpunkte eines Brianchonschen Sechsseits.

Nun stellt die Gleichung:

$$(6) \quad r^2 - r(a + b + c) + bc + ca + ab = 0$$

einen Kegelschnitt dar. Vom Punkte $a = 0$ gehen diejenigen beiden Tangenten an diese Kurve, welche durch die Gleichung $r^2 - r(b + c) + bc = 0$ dargestellt werden. Die linke Seite dieser Gleichung ist aber gleich $(r - b)(r - c) = b'c'$. Indem man in gleicher Weise die von den Punkten $b = 0$ und $c = 0$ ausgehenden Tangenten aufsucht, zeigt man, dafs der Kegelschnitt von den sechs Geraden (ab'), (b'c), (ca'), (a'b), (bc'), (c'a) berührt wird. Durch fünf von diesen Tangenten ist aber der Kegelschnitt bereits bestimmt; daher folgt der Satz:

Sobald ein Kegelschnitt fünf Seiten eines Brianchonschen Sechsseits berührt, berührt er auch die sechste.

Übungen:

1) Man soll beliebig viele Tangenten einer Parabel konstruieren, von der vier Tangenten gegeben sind.

2) a) Beliebig viele Tangenten eines Kegelschnitts aufzufinden, von dem drei Tangenten und die Berührungspunkte von zweien gegeben sind.

b) Man soll weitere Tangenten an eine Parabel ziehen, von der man zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte kennt.

c) Man kennt einen Durchmesser einer Parabel, die Tangente

in seinem Endpunkte und eine weitere Tangente; man konstruiere weitere Tangenten.

d) Von einer Hyperbel kennt man die Asymptoten und eine Tangente; weitere Tangenten zu konstruieren.

3) Wenn ein Dreieck sich so bewegt, dafs die Eckpunkte in festen Geraden verbleiben und zwei Seiten sich um feste Punkte drehen, so umhüllt die dritte Seite einen Kegelschnitt.

4) Ist ein Dreieck einem Kegelschnitt umbeschrieben, so gehen die Verbindungslinien von je einer Ecke mit dem Berührungspunkte der Gegenseite durch einen Punkt.

5) Um einen Kegelschnitt ein Dreieck zu beschreiben, dessen Eckpunkte der Reihe nach in vorgeschriebenen Geraden liegen.

§ 28.

Die projektive Erzeugung der Kegelschnitte.

1. Um vermittelst des Pascalschen Theorems sämtliche Punkte des durch die fünf Punkte α, β, γ, δ, ε bestimmten Kegelschnitts zu konstruieren, kann man (Figur S. 173) den Punkt μ alle Lagen auf der Geraden $\beta\gamma$ annehmen lassen. Da der Punkt λ als Schnittpunkt von $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$ bekannt ist, findet man den Punkt ν als Schnittpunkt von $\lambda\mu$ mit $\gamma\delta$; alsdann ist der Schnittpunkt von $\alpha\nu$ und $\varepsilon\mu$ ein weiterer Punkt der Kurve.

Nun erzeugt μ auf $\beta\gamma$ eine Punktreihe. Da μ und ν mit dem festen Punkte λ in gerader Linie liegen, so ist die Punktreihe ν zu der Punktreihe μ perspektivisch; also sind die Strahlenbüschel $(\alpha\nu)$ und $(\varepsilon\mu)$ projektivisch.

Jeder Kegelschnitt kann erzeugt werden durch den Schnitt entsprechender Strahlen in zwei projektiven Strahlenbüscheln.

2. Wir wollen diesen Satz rein analytisch beweisen. Der eine Strahlenbüschel werde durch die Gleichung dargestellt:

$$A + \lambda B = 0,$$

wo A und B homogen lineare Ausdrücke in x_1, x_2, x_3 sind. Ein zweiter Strahlenbüschel werde so gewählt, dafs dem Strahle $A = 0$ des ersten im zweiten der Strahl $A' = 0$ und dem Strahle $B = 0$ der Strahl $B' = 0$ entspricht; dann verfügt man über die in der Form B' enthaltene Konstante in der Weise, dafs dem Strahle

$A + B = 0$ der Strahl $A' + B' = 0$ zugeordnet wird. Jetzt mufs man dem Strahle $A + \lambda B = 0$ den Strahl $A' + \lambda B' = 0$ zuordnen, da der Koefficient λ das Doppelverhältnis der Strahlen $A = 0$, $B = 0$, $A + \lambda B = 0$, $A + B = 0$ darstellt.

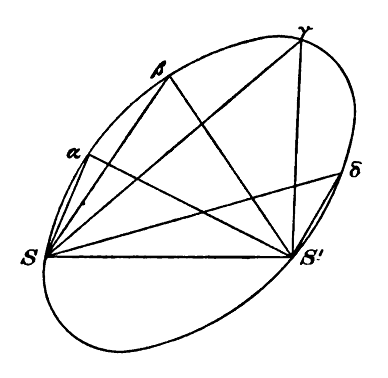
Hiernach erhält man jeden einzelnen Punkt der Kurve als Schnittpunkt der beiden geraden Linien:

$$(1) \quad A + \lambda B = 0, \; A' + \lambda B' = 0.$$

Um die Gleichung der Kurve zu erhalten, hat man den Koefficienten λ aus den beiden Gleichungen zu eliminieren. Daraus folgt, dafs die Kurve von der zweiten Ordnung ist und durch die Gleichung dargestellt wird:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0.$$

3. Diese Kurve ist durch fünf Punkte α, β, γ, δ, ε bestimmt. Zwei derselben, etwa die Punkte α und ε (s. Figur S. 173), wähle man zu Scheiteln der beiden Büschel. Als Gerade $A = 0$, $B = 0$, $A + B = 0$ nehme man der Reihe nach die Geraden $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ und lasse ihnen die Geraden $\varepsilon\beta$, $\varepsilon\gamma$, $\varepsilon\delta$ entsprechen, indem man die drei letzteren durch die Gleichungen $A' = 0$, $B' = 0$, $A' + B' = 0$ darstellt. Durch diese Festsetzung ist die projektive Zuordnung der Büschel und somit die Kurve bestimmt. Wenn wir also zwei andere Punkte S und S' dieses Kegelschnitts zu Scheiteln von zwei Strahlenbüscheln wählen und diese dadurch projektiv auf einander beziehen, dafs man die nach drei beliebigen Punkten α, β, γ dieser Kurve gezogenen Strahlen einander entsprechen läfst, so hat derjenige Kegelschnitt, welcher jetzt durch den Schnitt entsprechender Strahlen entsteht, mit dem früheren fünf Punkte gemeinschaftlich; er mufs also mit ihm zusammenfallen.



Dafs man diesen Kegelschnitt auch durch zwei projektive Strahlenbüschel erzeugen kann, welche zwei beliebige Punkte des Kegelschnitts zu Scheiteln haben, erkennt man auf folgendem

Wege. Wenn der Koefficient α einen festen, der Koefficient μ einen veränderlichen Wert hat, so stellt die Gleichung:

$$(A + \alpha B) + \mu (A' + \alpha B') = 0$$

einen Büschel dar, dessen Scheitel im Schnittpunkte der Geraden $A + \alpha B = 0$ und $A' + \alpha B' = 0$ liegt; es ist das derjenige Punkt des Kegelschnitts, welcher bei der vorhin betrachteten Entstehungsweise dem Parameter $\lambda = \alpha$ entspricht. Der Büschel

$$(A + \beta B) + \mu (A' + \beta B') = 0$$

hat zum Scheitel den dem Parameter $\lambda = \beta$ entsprechenden Punkt. Da der zweite Büschel dem ersten projektiv ist, so erzeugen seine Strahlen durch ihre Schnittpunkte mit den entsprechenden Strahlen des ersten einen Kegelschnitt, dessen Gleichung ist:

$$\begin{vmatrix} A + \alpha B & A' + \alpha B' \\ A + \beta B & A' + \beta B' \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0.$$

Der zweite Kegelschnitt ist also mit dem ersten identisch.

4. Auf dem Kegelschnitte nehmen wir vier Punkte 1, 2, 3, 4, welche bei der ersten Erzeugungsweise zu den Werten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 des Parameters λ und bei der zweiten Erzeugungsweise zu den Werten μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 gehören. Es seien S und S′ die Scheitel für die erste, T und T′ die für die zweite Herleitung. Dann haben die vier von S nach den Punkten 1, 2, 3, 4 gezogenen Strahlen das Doppelverhältnis:

$$\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_4 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

Dasselbe Doppelverhältnis haben die vier Strahlen, welche von S′ nach diesen vier Punkten gehen.

In gleicher Weise ist

$$(T : 1, 2, 3, 4) = (T' : 1, 2, 3, 4) = \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_4 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_4}.$$

Nun kann man etwa β so bestimmen, dafs der Punkt T′ mit dem Punkte S′ zusammenfällt. Dann ergiebt sich:

$$(S : 1, 2, 3, 4) = (S' : 1, 2, 3, 4) = (T : 1, 2, 3, 4).$$

Hier ist T ein ganz beliebiger Punkt des durch die Strahlenbüschel S und S′ erzeugten Kegelschnitts. Daher gilt der Satz:

Die vier Strahlen, welche nach vier festen Punkten

eines Kegelschnitts von einem seiner Punkte aus gezogen werden können, haben dasselbe Doppelverhältnis, von welchem Punkte der Kurve aus man auch die vier Punkte projizieren mag.

Wir drücken diesen Satz auch in folgender Weise aus:

Vier Punkte eines Kegelschnitts bestimmen ein festes Doppelverhältnis von Strahlen für jeden beliebigen Punkt der Kurve als Scheitel.

Wir dürfen demnach vom Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kegelschnitts sprechen, indem wir darunter das Doppelverhältnis der vier Strahlen verstehen, die von einem beliebigen Punkte der Kurve aus nach den vier Strahlen gezogen werden können.

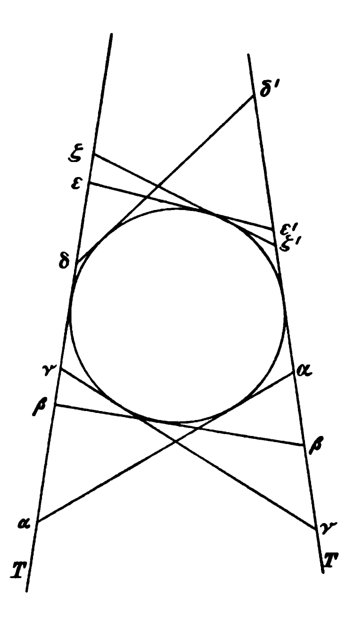
5. Dem Satze:

Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen von zwei projektiven Strahlenbüscheln bilden einen Kegelschnitt,

stellen wir den Satz zur Seite:

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte in zwei projektiven Punktreihen umhüllen einen Kegelschnitt.

Die Beweise beider Sätze sind wesentlich dieselben.



Es mögen die Gleichungen:

(3) $A+\mu B=0$ und $A'+\mu B'=0$

zwei projektive Punktreihen darstellen, indem A, B, A', B' homogen lineare Ausdrücke in den Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3 sind. Indem man für jeden Wert von μ die durch die beiden Gleichungen (3) dargestellten Punkte durch eine gerade Linie verbindet, erhält man eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden. Alle diese umhüllen den Kegelschnitt, dessen Gleichung ist:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung wird auch befriedigt, wenn man $A = B = 0$ oder wenn man $A' = B' = 0$ setzt. Daher wird der Kegelschnitt auch von den Trägern der beiden Punktreihen berührt.

Derselbe Kegelschnitt wird durch projektive Zuordnung der Punktreihen:

$$(A + \alpha B) + \nu (A' + \alpha B') = 0$$
$$(A + \beta B) + \nu (A' + \beta B') = 0$$

erhalten, da die Determinante

$$\begin{vmatrix} A + \alpha B & A' + \alpha B' \\ A + \beta B & A' + \beta B' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$$

ist.

6. Vier Tangenten eines durch projektive Zuordnung zweier Punktreihen erzeugten Kegelschnitts treffen die beiden Träger in projektivisch entsprechenden Punkten; die Doppelverhältnisse der Schnittpunkte mit den beiden Trägern sind also einander gleich. Nun kann man den einen der beiden Träger durch eine beliebige Tangente des Kegelschnitts ersetzen; daher bestimmen auch die Schnittpunkte der vier gegebenen Tangenten mit jeder andern Tangente dasselbe Doppelverhältnis.

Das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen eine Tangente eines Kegelschnitts von vier festen Tangenten desselben geschnitten wird, ist unabhängig von der Wahl der geschnittenen Tangente.

Unter dem Doppelverhältnis von vier Tangenten eines Kegelschnitts versteht man das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen die vier Tangenten eine beliebige Tangente der Kurve schneiden.

Übungen:

1) a) Wann führt die projektive Zuordnung zweier Strahlenbüschel auf ein Geradenpaar?

b) Wie hat man die projektive Zuordnung zweier Punktreihen zu specialisieren, damit die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen von zwei festen Punkten gehen?

2) Aus dem Satze über die Gleichheit der Doppelverhältnisse lassen sich zahlreiche Folgerungen ziehen.

a) Wenn zwei feste Punkte α und β einer Hyperbel mit einem veränderlichen Punkte ξ der Kurve verbunden werden und die Verbindungslinien eine feste, die Kurve in γ schneidende

Parallele zu einer Asymptote in zwei Punkten α' und β' treffen, so ist das Verhältnis $\gamma\alpha' : \gamma\beta'$ konstant.

(Man messe, wenn δ der unendlichferne Punkt ist, das Doppelverhältnis $(\xi : \alpha\beta\gamma\delta)$ auf der Parallelen.)

b) Wie lassen sich vermittelst dieses Satzes beliebig viele weitere Punkte der Hyperbel bestimmen, nachdem die Richtung einer Asymptote und vier Punkte, oder die Richtungen der beiden Asymptoten und drei Punkte gegeben sind?

c) Wie lautet der zu a) entsprechende Satz für die Parabel?

d) Wenn zwei feste Punkte α und β einer Hyperbel mit einem veränderlichen Punkte ξ der Kurve verbunden werden, so bestimmen die Verbindungslinien auf einer Asymptote einen Abschnitt von unveränderlicher Länge.

(Man nehme in a) einen zweiten Punkt ξ' der Kurve hinzu, dessen Verbindungslinien mit α und β die Gerade $\gamma\alpha'$ in α'' und β'' schneiden mögen. Dann folgt aus $\gamma\alpha' : \gamma\beta' = \gamma\alpha'' : \gamma\beta''$ unmittelbar $\alpha'\beta' : \alpha''\beta'' = \alpha'\gamma : \alpha''\gamma$. Rückt jetzt γ ins Unendlichferne, so folgt der Satz.)

e) Man suche beliebig viele Punkte einer Hyperbel, nachdem drei Punkte und eine Asymptote gegeben sind.

f) Jede Tangente einer Hyperbel schneidet auf den Asymptoten vom Mittelpunkte aus zwei Strecken ab, deren Produkt konstant ist.

(M sei der Mittelpunkt; die eine Asymptote werde von zwei Tangenten in α und α', die andere in β und β' geschnitten. Ist δ der unendlichferne Punkt der ersten, ε der der zweiten Asymptote, so müssen, weil die Asymptoten auch Tangenten sind, die Doppelverhältnisse $(\delta M\alpha\alpha')$ und $(M\delta\beta\beta')$ gleich sein.)

3) a) Nachdem drei Strahlenpaare in zwei konzentrischen Strahlenbüscheln gegeben sind, soll man zu jedem Strahle des einen den entsprechenden Strahl des andern finden und diejenigen Strahlen konstruieren, welche mit den entsprechenden zusammenfallen.

(Den von S ausgehenden Strahlen a, b, c mögen die ebenfalls von S ausgehenden Strahlen a', b', c' projektivisch zugeordnet sein. Man lege durch S einen beliebigen Kreis, der die Strahlen a, b, c, a', b', c' der Reihe nach in α, β, γ, α', β', γ' schneiden möge. Zwei weitere entsprechende Strahlen x und x' mögen in

ξ und ξ' geschnitten werden. Da ist $(S : \alpha'\beta'\gamma'\xi') = (\alpha : \alpha'\beta'\gamma'\xi')$ und $(S : \alpha\beta\gamma\xi) = (\alpha' : \alpha\beta\gamma\xi)$, so mufs auch $(\alpha' : \alpha\beta\gamma\xi) = (\alpha : \alpha'\beta'\gamma'\xi')$ sein. Wenn sich $\alpha\beta'$ und $\alpha'\beta$ in β'', $\alpha\gamma'$ und $\alpha'\gamma$ in γ'' schneiden, und die Gerade $\beta''\gamma''$ von $\alpha\alpha'$ in α'', $\alpha\xi'$ in ξ'', $\alpha'\xi$ in ξ''' getroffen wird, so mufs $(\alpha''\beta''\gamma''\xi'') = (\alpha''\beta''\gamma''\xi''')$ sein oder ξ'' und ξ''' fallen zusammen. Hiernach läfst sich leicht zum Strahle x der zugeordnete Punkt x' konstruieren. Die Schnittpunkte der Geraden $\beta''\gamma''$ mit dem Kreise führen auf die sich selbst entsprechenden Strahlen.)

b) Man löse die entsprechende Aufgabe für zwei auf demselben Träger befindliche projektive Punktreihen.

(Indem man die Punkte der beiden Punktreihen mit einem beliebigen Punkte der Ebene verbindet, erhält man zwei konzentrische projektive Strahlenbüschel.)

c) Man soll ein Dreieck konstruieren, welches einem gegebenen Dreiecke umbeschrieben und einem zweiten gegebenen Dreieck einbeschrieben ist.

(R, S, T seien die Eckpunkte des ersten, a, b, c die Seiten des zweiten Dreiecks. Man nehme auf a einen beliebigen Punkt α, ziehe αR bis zum Schnittpunkte β mit b, dann βS bis zum Schnittpunkte γ mit c und endlich γT bis zum Schnittpunkte α' mit a. Wenn jetzt α die Punktreihe a beschreibt, so beschreibt α' eine projektive Punktreihe. Dadurch ist die Aufgabe auf b) zurückgeführt.)

d) Die Schnittpunkte eines Kegelschnitts, von dem fünf Punkte gegeben sind, mit einer beliebigen Geraden zu bestimmen.

(Die fünf Punkte seien S, S', α, β, γ; die Strahlen Sα, Sβ, Sγ und S'α, S'β, S'γ, bestimmen auf der gegebenen Geraden zwei projektive Punktreihen.)

e) Wenn von einem Kegelschnitte fünf Tangenten gegeben sind, so soll man diejenigen Tangenten konstruieren, die von einem gegebenen Punkte ausgehen.

f) Von zwei Kegelschnitten sind zwei gemeinschaftliche Punkte und von jedem noch drei Punkte gegeben; man soll die weiteren Schnittpunkte konstruieren.

g) Nachdem von zwei Kegelschnitten zwei gemeinschaftliche Tangenten und von jedem noch drei weitere Tangenten gegeben

sind, sollen die beiden andern gemeinschaftlichen Tangenten gefunden werden.

4) Da die Involution nur ein besonderer Fall der projektiven Zuordnung ist, so kann man alle auf Involutionen sich beziehende Konstruktionen nach der in 3) a) und b) gezeigten Methode ausführen. Man wende diese Methode auf die in 5) d)—h) gestellten Aufgaben an und vergleiche die so gewonnene Lösung mit derjenigen, welche sich aus der in 5) a) und b) angestellten Betrachtung ergiebt.

5) a) Zieht man durch einen Punkt beliebig viele gerade Linien und verbindet die Punktepaare, in denen sie einen gegebenen Kegelschnitt treffen, mit einem festen Punkte dieser Kurve, so sind die nach den Schnittpunkten derselben Geraden gehenden Strahlen einander involutorisch zugeordnet.

(Wenn M ein beliebiger Punkt der Ebene, S ein beliebiger Punkt des Kegelschnitts ist, und wenn eine durch M gelegte Gerade den Kegelschnitt in α und α', eine zweite durch M gehende Gerade in β und β', eine dritte in γ und γ' . . . schneidet, so entsprechen die Strahlen $S\alpha$ und $S\alpha'$, $S\beta$ und $S\beta'$, $S\gamma$ und $S\gamma'$ u. s. w. einander involutorisch. Zum Beweise nehme man den Punkt S′ hinzu, in welchem der Kegelschnitt noch von MS geschnitten wird. Dann schneiden $S\alpha$ und $S'\alpha'$, $S\beta$ und $S'\beta'$, $S\gamma$ und $S'\gamma'$ u. s. w. die Polare von M je in demselben Punkte; daher ist $(S : \alpha\alpha'\beta\gamma) = (S' : \alpha'\alpha\,\beta'\gamma')$. Da aber auch

$$(S : \alpha'\alpha\,\beta'\gamma') = (S' : \alpha'\alpha\,\beta'\gamma')$$

ist, folgt: $(S : \alpha\alpha'\,\beta\gamma) = (S : \alpha'\alpha\,\beta'\gamma')$.)

b) Jede Strahleninvolution, deren Scheitel auf einem Kegelschnitte liegt, schneidet diesen so, dafs die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt gehen.

c) Wenn ein rechter Winkel sich um den Scheitel dreht, so geht die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Schenkel mit einem beliebigen durch den Scheitel gelegten Kegelschnitte stets durch einen festen Punkt.

(In S stehen die Geraden a und a′, b und b′, c und c′ . . . je auf einander senkrecht; ein durch S gehender Kegelschnitt werde von a, a′, b, b′, c, c′ . . . der Reihe nach in α, α', β, β', γ, γ' . . . geschnitten. Dafs jetzt die Geraden $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ . . . durch einen festen Punkt M gehen, folgt unmittelbar aus b).)

d) Eine durch zwei Strahlenpaare bestimmte Involution zu vervollständigen und ihre Hauptstrahlen zu finden.

(Man lege durch den Scheitel einen Kreis und bestimme in der angegebenen Weise den Punkt M. Die Berührungspunkte der von M ausgehenden Tangenten liefern die Hauptstrahlen.)

e) Man soll die Hauptpunkte einer durch zwei Punktepaare bestimmten Involution konstruieren. (Man projiziere die Involution von einem beliebigen Punkte aus.)

f) Wann läfst sich eine gegebene Punktinvolution als eine Kreisinvolution projizieren?

g) Einen Kegelschnitt konstruieren, der durch vier gegebene Punkte geht und eine feste Gerade berührt.

(Man suche die Hauptpunkte einer Punktinvolution.)

h) Einen Kegelschnitt konstruieren, der vier gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

i) Durch vier Punkte eine Parabel zu legen.

k) Eine Parabel zu finden, die drei gegebene Gerade berührt und durch einen vorgeschriebenen Punkt geht.

l) Das gemeinsame Paar von zwei Strahleninvolutionen zu finden.

(Beide mögen auf einem durch den Scheitel S gelegten Kreise abgebildet werden; für den einen sei M, für den andern N der Hilfspunkt; die Gerade MN liefert das gesuchte Strahlenpaar.)

m) Nachdem zwei Strahlenpaare einer Involution gegeben sind, dasjenige Paar zu finden, dessen Gerade einen rechten Winkel mit einander bilden.

n) Die Axen eines Kegelschnitts zu finden, wenn zwei Paare konjugierter Durchmesser gegeben sind.

o) Wenn zwei Involutionen auf derselben geraden Linie liegen, so soll das gemeinsame Punktepaar gesucht werden.

§ 29.

Der Kreis und die unendlichfernen Kreispunkte.

1. Wir wenden in den folgenden Untersuchungen rechtwinklige Cartesische Koordinaten an, schreiben sie aber vielfach in der Form $x_1 : x_3$ und $x_2 : x_3$, wo $x_3 = 0$ die unendlichferne Gerade darstellt, während für einen eigentlichen Punkt $x_3 = 1$,

$x_1 = x$, $x_2 = y$ sein soll. In diesen Koordinaten ist die Gleichung eines beliebigen Kreises:

$$(1) \quad (x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 - r^2x_3^2 = 0.$$

Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der unendlichfernen Geraden werden erhalten, wenn man in der Gleichung (1) $x_3 = 0$ setzt. Diese Punkte bestimmen sich aus den Gleichungen:

$$(2) \quad x_3 = 0, \; x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Wir sehen, dafs alle Kreise die unendlichferne Gerade in denselben beiden imaginären Punkten schneiden. Diese beiden Punkte heifsen als Punkte der unendlichfernen Geraden, obwohl ihr Abstand von einem beliebigen eigentlichen Punkte jeden beliebigen Wert hat, die unendlichternen Kreispunkte.

2. Umgekehrt ist jede Kurve zweiter Ordnung, welche durch die unendlichfernen Kreispunkte geht, ohne die ganze unendlichferne Gerade zu enthalten, ein Kreis. Soll die Kurve $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$, wo $x_1 : x_3$ und $x_2 : x_3$ rechtwinklige Cartesische Koordinaten sind, mit der unendlichfernen Geraden $x_3 = 0$ die Punkte $x_1^2 + x_2^2 = 0$ gemeinschaftlich haben, so mufs $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$ sein. Wenn $a_{11} \neq 0$ ist, so stellt die Gleichung einen Kreis dar. Für $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ zerfällt die Kurve in zwei Gerade, von denen die eine die unendlichferne Gerade ist.

Wenn eine Kurve zweiter Ordnung mit der unendlichfernen Geraden die Kreispunkte, aber keine weiteren Punkte gemeinschaftlich hat, so ist sie ein Kreis.

Speciell ist jeder eigentliche Kegelschnitt, der durch die unendlichfernen Kreispunkte geht, ein Kreis.

3. Für einen eigentlichen Punkt (x, y) der Ebene stellt der Ausdruck $(x - a)^2 + (y - b)^2$ das Quadrat des Abstandes der Punkte (x, y) und (a, b) dar. Daher ist die linke Seite der Gleichung (1) für einen Aufsenpunkt gleich dem Quadrate der Tangente, die man von diesem Punkte aus an den Kreis legen kann. Für einen Innenpunkt ist $r^2 > (x - a)^2 + (y - b)^2$, somit $r^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2$ gleich dem Quadrate aus der Hälfte der kleinsten Sehne, welche durch den Punkt (x, y) gelegt werden kann. Daher kann man die Bedeutung der linken Seite der Gleichung (1) für einen beliebigen Punkt P (oder x, y) dadurch bestimmen, dafs man durch ihn eine Gerade zieht, welche den Kreis in zwei Punkten A und B schneidet; dann ist der Wert

dieses Ausdruckes stets gleich dem Produkte PA . PB oder gleich der Potenz des Punktes in Bezug auf den Kreis. Für einen Aufsenpunkt hat die Potenz einen positiven Wert, der dem Quadrate der vom Punkte ausgehenden Tangente gleich ist. Die Potenz eines Innenpunktes ist negativ, entsprechend dem Umstande, dafs die Strecken PA und PB entgegengesetzte Richtung haben; ihr Wert ist gleich dem negativen Quadrate aus der Hälfte der kleinsten durch den Punkt gehenden Sehne.

4. Indem wir

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2 \text{ kurz gleich } K,$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2-r'^2 \text{ kurz gleich } K'$$

setzen, wird die Gleichung desjenigen Büschels, welcher durch die beiden Kreise $K=0$, $K'=0$ bestimmt wird:

$$(3) \quad K+\lambda K'=0.$$

In dieser Gleichung haben x^2 und y^2 denselben Koefficienten und fehlt der Koefficient von xy; daher stellt sie wieder einen Kreis dar. Es gilt der Satz:

Wenn ein Kegelschnittsbüschel zwei Kreise enthält, so sind alle seine Kurven Kreise.

5. Für $\lambda=-1$ nimmt die Gleichung (3) die Form an: $K-K'=0$ oder in homogenen Koordinaten:

$$(4) \quad \{-2(a-a')x_1-2(b-b)x_2+ (a^2+b^2-r^2-a'^2-b'^2+r'^2)x_3\}x_3=0.$$

Die eine Gerade dieses Linienpaares ist die unendlichferne Linie, die andere wird im allgemeinen eine eigentliche Gerade sein. Da für jeden Punkt dieser Geraden die Gleichung besteht: $K=K'$, so hat jeder ihrer Punkte gleiche Potenzen für die beiden Kreise. Die Gerade heifst die Potenzlinie der beiden Kreise. Da mit $K=0$, $K'=0$ auch $K-K'=0$ ist, so geht die Potenzlinie durch die im Endlichen gelegenen Schnittpunkte der Kreise; aus diesem Grunde nennt man sie auch die Chordale der Kreise.

Die Centrale der beiden Kreise hat die Gleichung:

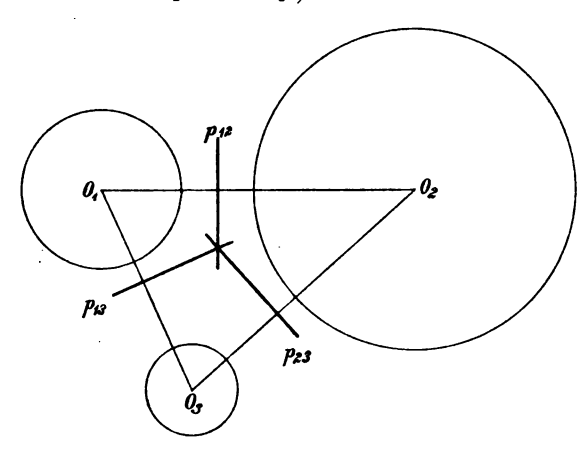
$$x(b-b')-y(a-a')+ab'-a'b=0.$$

Nach (4) ist die Gleichung der Potenzlinie:

$$x(a-a')+y(b-b')-\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-r^2-a'^2-b'^2+r'^2)=0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen geht hervor, dafs die Potenzlinie auf der Centrale senkrecht steht.

(In nachstehender Figur ist p_{12} die Potenzlinie der beiden von $O_1 O_2$, p_{13} die Potenzlinie der Kreise O_1 und O_3 und p_{23} die der Kreise von O_2 und O_3.)



6. Wenn drei Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ gegeben sind, so genügen die drei Potenzlinien, welche man aus der Verbindung je zweier Kreise erhält, den Gleichungen:

$$K_2 - K_3 = 0,\ K_3 - K_1 = 0,\ K_1 - K_2 = 0.$$

Nun ist offenbar

$$(K_2 - K_3) + (K_3 - K_1) + (K_1 - K_2) = 0;$$

also gehen die Potenzlinien p_{23}, p_{13} und p_{12} der drei Kreise K_1, K_2, K_3 durch denselben Punkt, den Potenzpunkt der Kreise.

7. Wenn (u, v, w) die Hesseschen Koordinaten einer geraden Linie und (a, b) die zugehörigen rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten eines Punktes sind, so stellt bekanntlich die Form

$$au + bv + w$$

den Abstand des Punktes (a, b) von der Geraden (u, v, w) dar. Demnach wird diese Gerade eine Tangente des mit dem Radius r um den Punkt (a, b) beschriebenen Kreises, wenn die Gleichung erfüllt wird:

$$(5) \quad au + bv + w = \pm r.$$

Diese Kurve kann auch durch eine homogene quadratische Gleichung in der Form

$$(6) \quad (au + bv + w)^2 = r^2 (u^2 + v^2)$$

dargestellt werden, weil nach § 11, 5 die Relation besteht:

$u^2 + v^2 = 1$. Auf die Form (6) kommt man auch, wenn man die Gleichung (1) nach der in § 14, 9 gegebenen Vorschrift durch Linienkoordinaten ausdrückt.

8. Wenn man in der Gleichung (6) r veränderlich sein läſst, so gelangt man zu der Gesamtheit der um den Punkt (a, b) als Mittelpunkt beschriebenen Kreise. Alle diese Kreise bilden eine Kurvenschar, welcher der gemeinschaftliche Mittelpunkt und das imaginäre Punktepaar $u^2 + v^2 = 0$ angehören. Dies Punktepaar stellt sich in Punktkoordinaten durch die beiden Gleichungen dar:

$$x_3 = 0, \; x_1^2 + x_2^2 = 0;$$

es ist also mit den unendlichfernen Kreispunkten identisch. Demnach stellt sich ein System konzentrischer Kreise als die Gesamtheit aller Kurven zweiter Klasse dar, welche durch die von einem festen Punkte (dem Mittelpunkte) nach den unendlichfernen Kreispunkten gezogenen Geraden doppelt berührt werden. Wir dürfen diese Beobachtung auch in folgenden Worten aussprechen:

Alle Kurven zweiter Klasse, welche in den unendlichfernen Kreispunkten durch die Verbindungsgeraden mit einem festen Punkte berührt werden, sind Kreise, welche den festen Punkt zum Mittelpunkte haben.

Schon hieraus geht hervor, daſs das System konzentrischer Kreise auch einen Büschel bildet, daſs demnach für dies System die in § 25 hergeleiteten Sätze gelten.

9. Die Form (5) ist recht geeignet, manche Eigenschaften der Kreise mit Leichtigkeit herzuleiten. Wir wollen uns damit begnügen, eine wichtige Beziehung mehrerer Kreise zu einander mit ihrer Hilfe zu beweisen.

Zu dem Ende führen wir folgende Symbole ein:

$$(7) \quad A_1 = a_1 u + b_1 v + w, \; A_2 = a_2 u + b_2 v + w,$$
$$A_3 = a_3 u + b_3 v + w.$$

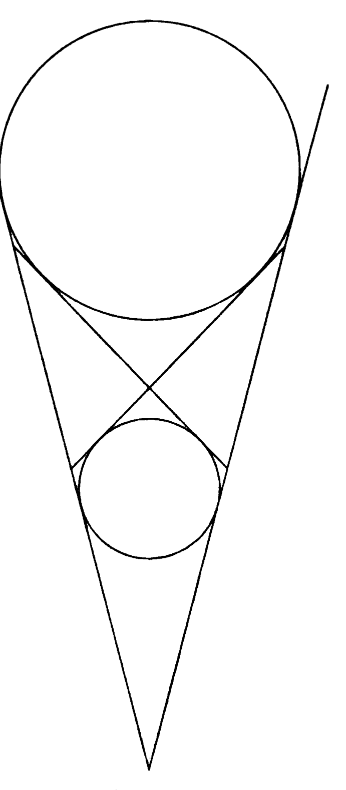
Da A_1 den Abstand des Punktes (a_1, b_1) von der Geraden (u, v, w) darstellt, so ist $A_1 = \pm r_1$ die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkte (a_1, b_1) und dem Radius r_1. Mit diesem Kreise stellen wir diejenigen Kreise zusammen, deren Gleichungen in entsprechender Weise sind: $A_2 = \pm r_2$, $A_3 = \pm r_3$.

Die Gleichung:

$$(8) \quad \frac{A_1}{r_1} = \frac{A_2}{r_2}$$

ist homogen linear in u, v, w; sie stellt also einen Punkt dar, welcher auf der Verbindungslinie der Punkte $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$, der Centrale der beiden ersten Kreise, liegt. Die Abstände einer beliebigen durch diesen Punkt gelegten Geraden von den Mittelpunkten verhalten sich wie die Radien. Die Gleichung wird befriedigt für $A_1 = r_1$, $A_2 = r_2$ und für $A_1 = -r_1$, $A_2 = -r_2$. Daher treffen sich in diesem Punkte auch diejenigen gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise, denen gegenüber die Mittelpunkte auf derselben Seite liegen. Dieser Punkt heifst der äufsere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise.

Durch die Gleichung:
$$(9) \quad \frac{A_1}{r_1} = -\frac{A_2}{r_2}$$
wird ein Punkt dargestellt, welcher ebenfalls der Centrale angehört und zu dem Punkte (8) den Mittelpunkten gegenüber harmonisch liegt. Die Abstände einer beliebigen durch diesen Punkt gelegten Geraden von den Mittelpunkten verhalten sich wie die Radien; aber die Mittelpunkte liegen jedesmal auf verschiedenen Seiten einer solchen Geraden. Auch durch diesen Punkt gehen zwei gemeinschaftliche Tangenten der Kreise; aber diesen beiden Tangenten gegenüber liegen die Kreise auf verschiedenen Seiten. Der Punkt heifst ein innerer Ähnlichkeitspunkt der Kreise.

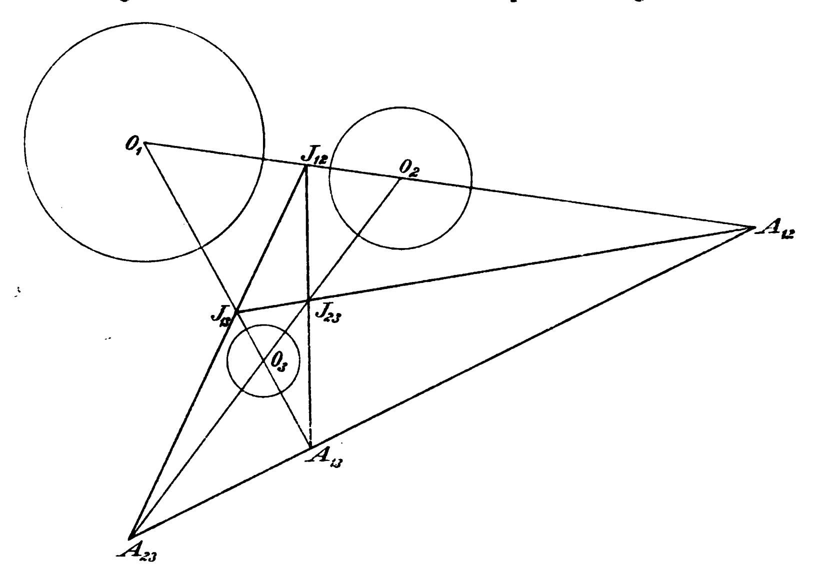


10. Die drei Kreise (7) haben drei äufsere und drei innere Ähnlichkeitspunkte. Die drei äufsern Ähnlichkeitspunkte werden durch die Gleichungen gegeben:
$$\frac{A_2}{r_2} = \frac{A_3}{r_3}, \quad \frac{A_3}{r_3} = \frac{A_1}{r_1}, \quad \frac{A_1}{r_1} = \frac{A_2}{r_2}.$$

Diese drei Gleichungen werden befriedigt für

$$\frac{A_1}{r_1} = \frac{A_2}{r_2} = \frac{A_3}{r_3};$$

somit liegen die drei äufsern Ähnlichkeitspunkte in gerader Linie.



Die Gerade, welche durch die innern Ähnlichkeitspunkte

$$\frac{A_2}{r_2} = -\frac{A_3}{r_3}, \quad \frac{A_3}{r_3} = -\frac{A_1}{r_1}$$

hindurchgeht, befriedigt die Gleichung:

$$\frac{A_1}{r_1} = \frac{A_2}{r_2};$$

es liegen also jedesmal zwei innere mit einem äufsern Ähnlichkeitspunkte in gerader Linie.

Die sechs Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise bilden die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits, dessen Diagonalen sich paarweise in einem der drei Mittelpunkte schneiden.

11. Zwei Gerade (u', v', w') und (u'', v'', w'') sind konjugierte Polare in Bezug auf die unendlichfernen Kreispunkte, wenn die Gleichung besteht:

$$(10) \quad u'u'' + v'v'' = 0.$$

Nun giebt u' den Cosinus, v' den Sinus des Winkels an, den die auf die Gerade (u', v', w') gefällte Senkrechte mit der x-Axe bildet; die entsprechende Bedeutung für die zweite Gerade haben u'' und v''. Die linke Seite von (10) stellt somit den Cosinus des Winkels dar, den die auf die beiden Geraden gefällten Senkrechten mit einander bilden. Die Gleichung (10) sagt also aus, dafs die Geraden auf einander senkrecht stehen.

Zwei zu den unendlichfernen Kreispunkten konjugierte Polare stehen auf einander senkrecht.

Der Pol einer gegebenen Geraden für die unendlichfernen Kreispunkte ist der Punkt, in welchem die unendlichferne Gerade von den zu der gegebenen Linie senkrechten Geraden geschnitten wird.

12. Zwei unendlichferne Punkte ($x' : y'$) und ($x'' : y''$) liegen zu den unendlichfernen Kreispunkten harmonisch, wenn die Gleichung erfüllt ist:

$$(11) \quad x'x'' + y'y'' = 0.$$

Diese Gleichung kommt ganz auf die Gleichung (10) hinaus; da sie aber für manche Anwendungen besser geeignet ist, wollten wir sie wenigstens anführen.

Übungen:

1) a) Die Hauptstrahlen einer jeden Involution, deren zugeordnete Strahlen auf einander senkrecht stehen, gehen durch die unendlichfernen Kreispunkte.

b) Auf der unendlichfernen Geraden erzeugen die Schnittpunkte mit Paaren auf einander senkrecht stehender Geraden eine Involution, deren Hauptpunkte die Kreispunkte sind.

c) Zwei auf einander senkrecht stehende Gerade schneiden die unendlichferne Gerade in Punkten, die zu den Kreispunkten harmonisch liegen.

2) a) Jedem Kegelschnittsbüschel gehört eine gleichseitige Hyperbel an.

(Es ist das diejenige Kurve des Büschels, für welche die unendlichfernen Kreispunkte konjugierte Pole sind.)

b) Sobald einem Büschel zwei gleichseitige Hyperbeln angehören, enthält derselbe nur gleichseitige Hyperbeln.

(Man beachte die auf der unendlichfernen Geraden erzeugte Involution.)

c) In diesem Falle besteht jedes dem Büschel angehörende Geradenpaar aus zwei sich senkrecht durchschneidenden Linien.

d) Zwei gleichseitige Hyperbeln durchschneiden sich stets in vier Punkten, welche die Eckpunkte und den Höhenpunkt eines Dreiecks darstellen.

e) Hiermit hängt der Satz der elementaren Geometrie zusammen:

Für dasjenige Dreieck, welches zwei von den Eckpunkten eines gegebenen Dreiecks und den Höhenpunkt zu Eckpunkten hat, fällt der Höhenpunkt mit dem dritten Eckpunkte des gegebenen Dreiecks zusammen;

oder:

Nimmt man irgend drei von den vier Schnittpunkten zweier Geradenpaare, deren Linien auf einander senkrecht stehen, zu Eckpunkten eines Dreiecks, so ist der vierte Schnittpunkt jedesmal der Höhenpunkt des Dreiecks.

f) Die Mittelpunkte der zu dem Büschel b) gehörenden Kurven liegen auf einem Kreise, der durch die Mitten der Seiten, die Fufspunkte der Höhen und die Mitten der obern Höhenabschnitte liegt (Feuerbachscher Kreis).

(Der die Mittelpunkte enthaltende Kegelschnitt mufs durch die unendlichfernen Kreispunkte und durch die Mitten der Verbindungsstrecken von je zwei Schnittpunkten gehen.)

g) Wenn umgekehrt die Kurven eines Büschels sich in den Eckpunkten eines Dreiecks und seinem Höhenpunkte schneiden, so enthält er nur gleichseitige Hyperbeln.

h) Man verifiziere die in a)—d), f), g) angegebenen Resultate durch Rechnung.

(Eine Seite und die zugehörige Höhe seien die Koordinatenaxen, und man lasse $(\mu, 0)$, $(\mu', 0)$, $(0, \nu)$, $(0, \nu')$ die gemeinschaftlichen Punkte sein. Dann mufs $\mu\mu' + \nu\nu' = 0$ sein. Jeder Kegelschnitt, der durch die vier Punkte geht, hat die Gleichung:

$$\nu\nu' x^2 + 2a_{12}xy + \mu\mu' y^2 - \nu\nu'(\mu + \mu')x - \mu\mu'(\nu + \nu')y - \mu\mu'\nu\nu' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen leite man die angegebenen Sätze her.)

3) a) Wenn die Axen zweier Parabeln auf einander senkrecht stehen, so enthält der durch sie bestimmte Büschel einen Kreis.

(Lage der unendlichfernen Punkte der Parabeln zu den Kreispunkten.)

b) Sobald ein Büschel einen Kreis enthält, stehen die Axen der demselben angehörenden Parabeln auf einander senkrecht. Die Mittelpunkte der Kurven des Büschels liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel.

(Der unendlichferne Punkt einer Parabel mufs auch als Mittelpunkt angesehen werden.)

4) Wenn drei Kegelschnitte zwei Punkte gemeinschaftlich haben, so gehen die drei Geraden, durch welche die Schnittpunkte von je zweien dieser Kurven verbunden werden, durch denselben Punkt.

(Erweiterung des Satzes über den Potenzpunkt dreier Kreise.)

§ 30.

Das Hauptaxenproblem der Kurven zweiter Ordnung.

1. Wir nehmen an, es sei die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten gegeben, und stellen uns die Aufgabe, ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem so zu bestimmen, dafs unter Benutzung desselben die Gleichung der Kurve ihre einfachste Gestalt erhält. Die gegebene Form sei:

$$(1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Der erste Schritt zur Lösung der gestellten Aufgabe soll darin bestehen, ein neues rechtwinkliges System (ξ, η) unter Beibehaltung des Anfangspunktes so zu bestimmen, dafs in den neuen Koordinaten der Koefficient des Produktes $\xi\eta$ null wird. Wir erhalten dadurch die Form:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi + 2D\eta + E = 0.$$

Diese Form soll dadurch geändert werden, dafs man das Koordinatensystem parallel verschiebt, dafs man also neue rechtwinklige Koordinaten (X, Y) durch die Gleichungen einführt:

$$\xi = X + m, \quad \eta = Y + n.$$

Dadurch erleiden die Koefficienten A und B keine Veränderung; man kann aber m und n so wählen, dafs C, D, E ihre einfachsten Werte erhalten. Dieser zweite Teil des Problems bietet geringe Schwierigkeit, nachdem der erste Teil gelöst ist.

Wir müssen uns daher hauptsächlich dem zuerst angegebenen Probleme zuwenden und sprechen dasselbe zunächst in folgender Form aus:

A) Nachdem die Gleichung einer Kurve zweiter Ordnung in rechtwinkligen Koordinaten gegeben ist, soll unter Beibehaltung des Anfangspunktes ein neues rechtwinkliges System so bestimmt werden, dafs in der auf das neue System bezogenen Gleichung das Produkt der Koordinaten wegfällt.

2. Wir wollen dies Problem noch in anderer Weise aussprechen. Wenn wir die Gleichung (1) durch beliebige Umwandlung der Koordinaten (x, y) in die Koordinaten (x', y') auf die neue Form bringen:

$$a'x'^2 + 2b'x'y' + 2c'y'^2 + 2d'x + 2e'y + f' = 0,$$

so hangen die neuen Koefficienten a', b', c' nur ab von a, b, c und den Transformations-Koefficienten. Solange man nur die Koefficienten a', b', c' kennen lernen will, braucht man die Koefficienten d, e, f der Gleichung (1) nicht zu berücksichtigen.

Unter Benutzung rechtwinkliger Koordinaten sind die quadratischen Glieder für jeden Kreis: $x^2 + y^2$; wenn diese Form ungeändert bleibt, so ist auch das neue Koordinatensystem rechtwinklig.

Demnach können wir das Problem A) durch das folgende ersetzen:

B) Die beiden quadratischen Formen

$$\Phi = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$\Psi = x^2 + y^2$$

sollen durch homogene lineare Gleichungen so umgestaltet werden, dafs die zweite Form ungeändert bleibt und die erste nur die Quadrate der Veränderlichen enthält.

3. Rechtwinklige Gerade sind konjugierte Polare zu den unendlichfernen Kreispunkten; ihre Schnittpunkte mit der unendlichfernen Geraden liegen zu diesen Punkten harmonisch. Die unendlichfernen Punkte der Kurve (1) ergeben sich aus der Gleichung:

$$(2) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

In diesem Ausdrucke wird der Koefficient von xy gleich null, wenn man der Bestimmung ein Punktepaar zu Grunde legt,

welches zu den Punkten (2) harmonisch liegt. Hiernach stellen wir das folgende Problem auf:

C) Zu den beiden unendlichfernen Punktepaaren

$$(2)\quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$$

$$(3)\quad x^2 + y^2 = 0$$

ein gemeinsames Paar harmonischer Punkte zu bestimmen.

Für einen Mittelpunkts-Kegelschnitt kommt das Problem darauf hinaus, zu der gegebenen Kurve und einem konzentrischen Kreise ein gemeinsames Paar konjugierter Durchmesser zu bestimmen. Da dies Problem aber nicht auf alle Kegelschnitte angewandt werden kann, wollen wir es nicht näher behandeln.

4. Wir wenden uns zunächst dem Problem C) zu und suchen einen unendlichfernen Punkt $(\lambda : \mu)$, welcher in Bezug auf die beiden Punktepaare (2) und (3) denselben harmonischen Punkt $(x : y)$ hat. Damit die Punkte $(\lambda : \mu)$ und $(x : y)$ zu den Punkten des Paares (2) harmonisch liegen, mufs die Bedingung erfüllt sein:

$$a\lambda x + b(\mu x + \lambda y) + c\mu y = 0;$$

die beiden Punkte liegen aber gegen das Punktepaar (3) harmonisch, wenn ist:

$$\lambda x + \mu y = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind in x, y homogen linear; sie liefern demnach für den Bruch $x:y$ nur dann denselben Wert, wenn die Koefficienten einander proportional sind, wenn man also einen Faktor ω derartig bestimmen kann, dafs die Gleichungen bestehen:

$$a\lambda + b\mu = \omega\lambda,\quad b\lambda + c\mu = \omega\mu$$

oder

$$(4)\quad (a - \omega)\lambda + b\mu = 0,\quad b\lambda + (c - \omega)\mu = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sind homogen linear in den Unbekannten λ und μ; sie können also nur befriedigt werden, wenn die Determinante verschwindet, oder wenn ω eine Wurzel der Gleichung ist:

$$(5)\quad \begin{vmatrix} a - \omega & b \\ b & c - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

5. Diese Gleichung braucht nur für den Fall untersucht zu werden, dafs der Koefficient b von null verschieden ist.

Da der Ausdruck

$$(a - \omega)(c - \omega) - b^2$$

für sehr große positive und negative Werte von ω einen positiven, aber für $\omega = a$ und $\omega = c$ einen negativen Wert hat, so findet, wenn man ω als variabel betrachtet und stetig alle reellen Werte annehmen läßt, ein Zeichenwechsel und damit ein Durchgang durch null statt. Die Gleichung (5) hat also zwei reelle Wurzeln ω_1 und ω_2.

Diese Wurzeln können nur gleich sein, wenn zugleich die Ableitung der linken Seite, also die Gleichung

$$2\omega = a + c$$

befriedigt wird. Nun ist $a - \frac{a+c}{2} = \frac{a-c}{2}$, $c - \frac{a+c}{2} = \frac{c-a}{2}$. Die Gleichung (5) hat also nur dann gleiche Wurzeln, wenn die Bedingung erfüllt ist:

$$-(a-c)^2 - 4b^2 = 0.$$

Das ist aber für reelle Werte von a, b, c nur möglich, wenn $a = c$, $b = 0$ ist, wenn also die Gleichung (1) einen Kreis darstellt. Dann ist aber das erste Problem bereits gelöst; wir dürfen uns also auf den Fall ungleicher Wurzeln beschränken.

6. Es seien ω_1 und ω_2 die Wurzeln der Gleichung (5); zu ω_1 möge nach (4) das Wertepaar λ_1, μ_1 und zu ω_2 in gleicher Weise das Wertepaar λ_2, μ_2 gehören.

Demnach bestehen die Gleichungen:

$$(6) \quad a\lambda_1 + b\mu_1 = \omega_1\lambda_1, \; b\lambda_1 + c\mu_1 = \omega_1\mu_1$$

und

$$(7) \quad a\lambda_2 + b\mu_2 = \omega_2\lambda_2, \; b\lambda_2 + c\mu_2 = \omega_2\mu_2.$$

Indem wir die beiden ersten Gleichungen mit λ_2, μ_2 multiplizieren und addieren, folgt:

$$a\lambda_1\lambda_2 + b(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + c\mu_1\mu_2 = \omega_1(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2).$$

Ebenso ergiebt sich aus den beiden letzten Gleichungen durch Multiplikation mit λ_1 und μ_1 die Relation:

$$a\lambda_1\lambda_2 + b(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + c\mu_1\mu_2 = \omega_2(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2).$$

Die Subtraktion dieser Gleichungen führt auf die Beziehung:

$$(\omega_1 - \omega_2)(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2) = 0$$

oder da die Wurzeln ω_1 und ω_2 ungleich sein sollen, auf

$$\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0.$$

Dann mufs aber auch die linke Seite einer jeden der beiden letzten Gleichungen verschwinden; oder es bestehen die Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{aligned} & a\lambda_1\lambda_2 + b(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + c\mu_1\mu_2 = 0 \\ & \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Die unendlichfernen Punkte $(\lambda_1, \mu_1, 0)$ und $(\lambda_2, \mu_2, 0)$ sind also konjugierte Pole zu den beiden Kurven oder liegen harmonisch je zu ihren unendlichfernen Punkten.

In der unendlichfernen Geraden giebt es stets ein und nur ein einziges Punktepaar, welches zu einem Kreise und einer beliebigen Kurve zweiter Ordnung, die selbst kein Kreis ist, ein Paar konjugierter Pole darstellt.

Hiermit ist das Problem C) gelöst. Ehe wir zu dem Problem B) übergehen, wollen wir aus dem letzten Satze folgende einfache Folgerung ziehen:

Ein Kreis und ein von einem Kreise verschiedener Mittelpunkts-Kegelschnitt haben stets ein einziges Paar paralleler konjugierter Durchmesser.

Da aber konjugierte Durchmesser eines Kreises auf einander senkrecht stehen, so können wir das letzte Resultat auch in folgender Weise aussprechen:

Jeder Kegelschnitt, der einen Mittelpunkt besitzt, hat entweder ein Paar von senkrechten konjugierten Durchmessern, oder jeder Durchmesser steht auf seinem konjugierten senkrecht.

7. Um von dem Problem C) zum Problem B) überzugehen, setzen wir:

$$(9) \quad x = \lambda_1\xi + \lambda_2\eta, \; y = \mu_1\xi + \mu_2\eta.$$

Für $\eta = 0$ wird $x:y = \lambda_1 : \mu_1$ und für $\xi = 0$ wird $x:y = \lambda_2 : \mu_2$; die neuen Axen gehen also durch die soeben gefundenen unendlichfernen Punkte hindurch.

Soll jetzt

$$x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2$$

sein, so treten zu den früheren Gleichungen noch die Bedingungen hinzu:

$$(10) \quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 = 1, \; \lambda_2^2 + \mu_2^2 = 1.$$

Indem wir ferner setzen:

$$(11) \quad a\lambda_1^2 + 2b\lambda_1\mu_1 + c\mu_1^2 = A, \; a\lambda_2^2 + 2b\lambda_2\mu_2 + c\mu_2^2 = B$$

und die Gleichungen (8) berücksichtigen, geht der Ausdruck $ax^2 + 2bxy + cy^2$ über in

$$(12) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = A\xi^2 + B\eta^2.$$

8. Wir wollen das Problem B) jetzt direkt in Angriff nehmen. Damit die Form $x^2 + y^2$ durch die Transformation (9) ungeändert bleibt, müssen die Bedingungen erfüllt sein:

$$(13) \quad \lambda_1^2 + \mu_1^2 = 1, \ \lambda_2^2 + \mu_2^2 = 1, \ \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0.$$

Die Gleichung (12) kann aber unter Beibehaltung der Abkürzungen (11) nur befriedigt werden, wenn die vier Koefficienten λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 der Forderung genügen:

$$(14) \quad a\lambda_1\lambda_2 + b(\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1) + c\mu_1\mu_2 = 0.$$

Somit sind uns vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Gröfsen λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 gegeben; wir müssen nachweisen, dafs diese Gleichungen eine reelle Lösung zulassen.

Zu dem Ende stellen wir die dritte Gleichung (13) mit der Gleichung (14) zusammen, indem wir die letztere in der Form schreiben:

$$(a\lambda_1 + b\mu_1)\lambda_2 + (b\lambda_1 + c\mu_1)\mu_2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert, nachdem λ_1 und μ_1 bestimmt sind, für den Quotienten $\lambda_2 : \mu_2$ denselben Wert, wie die dritte Gleichung (13), wenn die Koefficienten von λ_2 und μ_2 in den beiden Gleichungen sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Demnach mufs sein:

$$a\lambda_1 + b\mu_1 = \omega\lambda_1, \ b\lambda_1 + c\mu_1 = \omega\mu_1.$$

Das sind aber dieselben Gleichungen, von denen wir oben ausgegangen sind; wir können also jetzt den obigen Weg wieder verfolgen.

9. Um die geometrische Bedeutung der durch die drei Gleichungen (13) bestimmten Gröfsen λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 zu finden, beachten wir, dafs aus der letzten Gleichung folgt:

$$\mu_2 = \varkappa\lambda_1, \ \lambda_2 = -\varkappa\mu_1.$$

Indem wir diese Werte in die zweite Gleichung einsetzen und das Resultat mit der ersten vergleichen, folgt: $\varkappa^2 = 1$, oder $\varkappa = \pm 1$. Die erste Gleichung gestattet

$$\lambda_1 = \cos\alpha, \ \mu_1 = \sin\alpha$$

zu setzen, wo α den Winkel bedeutet, den die ξ-Axe mit der x-Axe bildet. Für $\varkappa = +1$ wird $\lambda_2 = -\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$,

$\mu_2 = \cos \alpha = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; die η-Axe bildet also mit der x-Axe den Winkel $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Wählen wir $\varkappa = -1$, so wird $\lambda_2 = \sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, $\mu_2 = -\cos \alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, oder die η-Axe bildet mit der x-Axe den Winkel $\alpha - \frac{\pi}{2}$.

Im Falle ($\varkappa = 1$) wird das neue Koordinatensystem aus dem ursprünglichen erhalten, indem man eine Drehung von der Gröfse α ausführt; im zweiten Falle ($\varkappa = -1$) wird das neue System nicht durch eine blofse Drehung aus dem gegebenen erhalten.

Den Gleichungen (13) genügen unter Beibehaltung des Anfangspunktes nur die beiden Transformationen:

$$(15) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha \\ y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \end{aligned}$$

und

$$(16) \quad \begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha \\ y &= \eta \sin \alpha - \eta \cos \alpha. \end{aligned}$$

10. Das sind aber auch die einzigen Transformationsformen, durch welche ein rechtwinkliges Koordinatensystem in ein anderes rechtwinkliges System von demselben Anfangspunkte umgewandelt wird. Denn wenn die neue x-Axe mit der alten den Winkel α bildet, so mufs die neue y-Axe mit ihr entweder den Winkel $\alpha + \frac{\pi}{2}$ oder $\alpha - \frac{\pi}{2}$ bilden. Im ersten Falle wird die Transformation durch die Gleichungen (15), im zweiten durch die Gleichungen (16) vermittelt. Wie wir gesehen haben, können wir die beiden Fälle dadurch zusammenfassen, dafs wir die Transformation (9) anwenden und zwischen den Koefficienten die Bedingungen (13) voraussetzen. Dadurch ist das Problem A) auf das Problem B) zurückgeführt.

11. Somit ist der erste Teil unserer Aufgabe auf verschiedene Weise, wenn auch wesentlich auf derselben Grundlage, gelöst. Wir müssen also jetzt dazu übergehen, die Form

$$(17) \quad A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi + 2D\eta + E = 0$$

durch Einführung paralleler Koordinaten zu vereinfachen. Indem wir setzen:

$$\xi = X + m, \quad \eta = Y + n,$$

geht die vorstehende Gleichung in die folgende über:

$$(18) \quad AX^2 + BY^2 + 2(Am + C)X + 2(Bn + D)Y$$
$$+ Am^2 + Bn^2 + 2Cm + 2Dn + E = 0.$$

Diese Gleichung erfordert eine verschiedene Behandlung, jenachdem keiner von den Koefficienten A und B verschwindet oder einer von ihnen gleich null ist.

12. Wenn die beiden Koefficienten A und B von null verschieden sind, so können wir die Gröfsen m und n so bestimmen, dafs

$$Am + C = 0, \quad Bn + D = 0$$

wird. Wir haben alsdann noch zu unterscheiden, ob für diese Werte von m und n das absolute Glied

$$Am^2 + Bn^2 + 2Cm + 2Dn + E$$

einen von null verschiedenen oder den Wert null annimmt. Im ersten Falle dürfen wir die ganze Gleichung durch das absolute Glied dividieren und ihm auf diese Weise den Wert eins geben. Indem wir noch die Vorzeichen der Quadrate in Betracht ziehen, erhalten wir folgende Einteilung:

I. A) a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, imaginärer Kegelschnitt,

b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, Ellipse,

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, Hyperbel.

I. B) a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, Paar von imaginären, einander schneidenden Geraden,

b) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, Paar von reellen, einander schneidenden Geraden.

13. Wenn einer der beiden Koefficienten A und B der Gleichung (18), etwa A gleich null ist, so dürfen wir den andern gleich eins setzen. Die Gleichung (18) nimmt dadurch die Gestalt an:

$$Y^2 + 2CX + 2(n + D)Y + n^2 + 2Cm + 2Dn + E = 0.$$

Hier kann man den Koefficienten von Y gleich null machen. Wenn C von null verschieden ist, so kann man auch das absolute Glied zum Verschwinden bringen; die Gleichung wird also

$$Y^2 + 2CX = 0.$$

Für $C = 0$ hat man zu unterscheiden, ob das absolute Glied von null verschieden ist oder ebenfalls verschwindet; daher treten zu den soeben angegebenen Arten die folgenden hinzu:

II. A) $y^2 = 2ax$, Parabel,

B) a) $y^2 + a^2 = 0$, Paar paralleler imaginärer Geraden,

b) $y^2 - a^2 = 0$, Paar paralleler reeller Geraden,

B) $y^2 = 0$ (Doppelgerade).

14. Wir sehen, dafs dieselben Formen, durch welche früher bei schiefwinkligen Koordinaten die einzelnen Arten charakterisiert wurden, auch für rechtwinklige Koordinaten erhalten werden. Die Reihenfolge ist eine verschiedene, weil hier die Kurven an erster Stelle nach ihrer Lage zur unendlichfernen Geraden unterschieden werden. Diejenigen beiden Arten, welche bei der in § 19 vorgenommenen Einteilung unter II B) c) und III b) angegeben wurden, können hier nicht auftreten, weil wir ausdrücklich vorausgesetzt haben, dafs die Kurve in rechtwinkligen Koordinaten durch eine quadratische Gleichung dargestellt werde.

Übungen:

1) Im folgenden ist ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu Grunde gelegt; man bringe die Gleichungen auf die einfachste Form, welche sie für rechtwinklige Axen annehmen können:

a) $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$,

b) $x^2 + 6xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$,

c) $3x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 5 = 0$,

d) $4x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 3y + 5 = 0$.

2) Jede Gleichung zweiten Grades in Cartesischen Koordinaten, in welcher x^2 und y^2 mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen sind, stellt eine Hyperbel dar, falls die Determinante von null verschieden ist.

3) Die Gleichung eines Kegelschnitts sei in Hesseschen Linienkoordinaten u_1, u_2, u_3, wo $u_1^2 + u_2^2 = 1$ ist, in der Form gegeben: $\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$. Die Determinante aus den Koefficienten dieser Gleichung wird von null verschieden vorausgesetzt.

a) Man leite direkt aus dieser Form die Bedingungen dafür her, dafs die Gleichung eine imaginäre Kurve, eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel darstellt.

b) Man gehe erst von der angegebenen Form auf eine Darstellung in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten über, stelle in den neuen Koefficienten die entsprechenden Bedingungen auf und gehe dann wieder auf die Koefficienten $A_{\iota\varkappa}$ zurück.

§ 31.

Konfokale Kegelschnitte.

1. Unter einer Schar konfokaler Kegelschnitte verstehen wir eine Schar von Kurven zweiter Klasse, zu der die unendlichfernen Kreispunkte gehören. Der Untersuchung legen wir ein zu einem rechtwinkligen Cartesischen Punktkoordinatensystem gehörendes System von Linienkoordinaten zu Grunde; wir benutzen also die in § 11, 5 eingeführten Hesseschen Koordinaten, welche wir bald mit u_1, u_2, u_3, bald mit u, v, w bezeichnen wollen. In diesen Koordinaten werden die unendlichfernen Kreispunkte durch die Gleichung dargestellt: $u_1^2 + u_2^2 = 0$. Mit der durch die Gleichung:

$$(1) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$$

in Hesseschen Koordinaten dargestellten Kurve sind alle Kurven konfokal, deren Gleichung in der Form:

$$(2) \quad \Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa + \lambda (u_1^2 + u_2^2) = 0$$

geschrieben werden kann.

Da alle durch einen der beiden unendlichfernen Kreispunkte gehenden geraden Linien Tangenten an die Kurve $u_1^2 + u_2^2 = 0$ sind, so sind allen Kurven (2) diejenigen Tangenten der Kurve (1) gemeinschaftlich, welche von den unendlichfernen Kreispunkten ausgehen. Wir dürfen daher auch folgende Definition aufstellen:

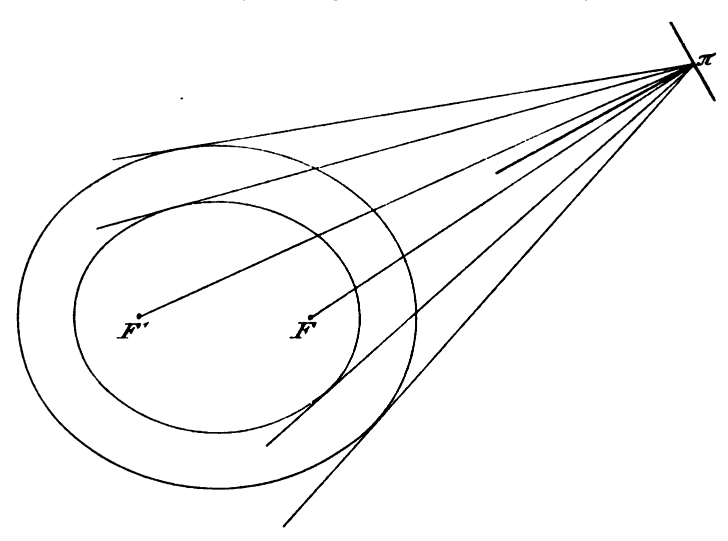
Zwei Kegelschnitte sind konfokal, wenn sie die vier von den unendlichfernen Kreispunkten ausgehenden Tangenten gemeinsam haben.

Aus der Theorie der Kurvenscharen ergiebt sich unmittelbar der Satz:

Jede Gerade wird von einer einzigen Kurve berührt, die zu einem gegebenen Kegelschnitte konfokal ist.

2. In Bezug auf die Kurve (1) ist zu einer gegebenen Geraden jede andere Gerade konjugierte Polare, welche durch einen festen Punkt, den Pol der Geraden, hindurchgeht. Zu den unendlichfernen Kreispunkten sind je zwei auf einander senkrecht stehende Gerade konjugierte Polare. Fällt man daher von demjenigen Punkte π der gegebenen Geraden p, der ihr Pol in Bezug auf die Kurve (1) ist, die Senkrechte p' auf p, so sind diese beiden Linien konjugierte Polare in Bezug auf alle Kurven der Schar (2). Der Pol von p in Bezug auf eine beliebige Kurve (2) liegt in p', und der Pol von p' für jede Kurve (2) wieder in p. Die Geraden p und p' liegen harmonisch zu den beiden Tangenten, welche von ihrem Schnittpunkte aus an irgend eine Kurve der Schar gelegt werden können; da sie aber auf einander senkrecht stehen, halbieren sie die Winkel, welche diese Tangenten mit einander bilden.

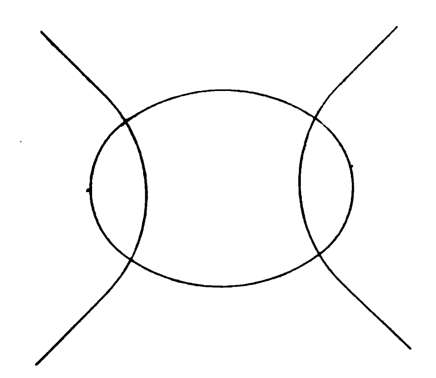
3. Umgekehrt lege man durch einen beliebigen Punkt der Ebene die Tangenten an eine Kurve der Schar und halbiere die von ihnen eingeschlossenen Winkel durch die Geraden p und p'. (Diese beiden Geraden sind reell, wenn auch die Tangenten selbst imaginär sind; man überzeugt sich aber leicht, dafs von jedem Punkte aus auch reelle Tangenten an Kurven der Schar ausgehen.) Die beiden Geraden p und p' sind offenbar konjugierte Polare



für die ausgewählte Kurve der Schar. Da sie zudem auf einander senkrecht stehen, sind sie auch konjugierte Polare für die unendlichfernen Kreispunkte und somit für jede Kurve der Schar. Sie bilden daher gleiche Winkel mit den an einen andern konfokalen Kegelschnitt gezogenen Tangenten.

Die Winkel, welche die von einem beliebigen Punkte aus an konfokale Kegelschnitte gezogenen Tangenten mit einander bilden, werden durch dasselbe Linienpaar halbiert.

4. Diejenige Kurve der Schar, welche von der Geraden p berührt wird, mufs durch den Schnittpunkt mit p′ gehen. Denn auch in Bezug auf diese Kurve sind die Geraden p und p′ konjugierte Polare; zu einer Tangente eines Kegelschnitts sind aber nur diejenigen Geraden konjugierte Polare, welche durch ihren Berührungspunkt gehen. Aus demselben Grunde geht durch den Schnittpunkt der Geraden p und p′ auch diejenige Kurve der Schar, welche von p′ berührt wird. In jedem Punkte der Ebene treffen sich zwei konfokale Kegelschnitte so, dafs ihre Tangenten und somit auch die Kurven auf einander senkrecht stehen. Dafs durch einen beliebigen Punkt nicht mehr als zwei Kurven der Schar gelegt werden können, geht schon aus dem in § 24, 6 bewiesenen Satze hervor.



Durch jeden Punkt der Ebene gehen zwei reelle Kurven, welche zu einem gegebenen Kegelschnitte konfokal sind; diese beiden Kurven schneiden einander in dem gegebenen Punkte rechtwinklig.

5. Wenn umgekehrt zwei konfokale Kegelschnitte einander schneiden, so sind die in einem der gemeinschaftlichen Punkte an sie gelegten Tangenten konjugierte Polare für beide Kurven und damit für alle Kurven der Schar. Sie müssen daher auch konjugierte Polare für die unendlichfernen Kreispunkte sein, also auf einander senkrecht stehen.

Zwei einander schneidende konfokale Kegelschnitte stehen in jedem ihrer Schnittpunkte auf einander senkrecht.

6. Bei der Verwandlung der Koordinaten bleibt, falls auch das neue Koordinatensystem ein Hessesches ist, die Form $u_1^2 + u_2^2$ ungeändert. Wir dürfen daher für die Kurve (1) die einfachste Form in Hesseschen Koordinaten voraussetzen. Sehen wir von dem Falle ab, daſs die sämtlichen Kurven der Schar unendlichferne Punktepaare sind, so bleiben uns zwei verschiedene Möglichkeiten, nämlich

a) konfokale Mittelpunktskurven, deren Gleichung in der Form

$$(3) \quad (\alpha + \lambda)\, u^2 + (\beta + \lambda)\, v^2 = w^2$$

vorausgesetzt werden kann, und

b) konfokale Parabeln, für deren Untersuchung wir die Gleichung zu Grunde legen:

$$(4) \quad \lambda u^2 + (1 + \lambda)\, v^2 + 2\alpha uw = 0.$$

Auch dürfen wir in (3) die Koefficienten α und β als ungleich, etwa $\alpha > \beta$ voraussetzen, da wir den Fall gleicher Koefficienten in § 29, 8 untersucht haben.

7. Die Gleichung (3) stellt für sehr groſse negative Werte von λ eine imaginäre Kurve dar. Diese geht für $\lambda = -\alpha$ in ein imaginäres Punktepaar über, welches auf der y-Axe liegt. Wenn $\alpha > -\lambda > \beta$ ist, erhalten wir eine Hyperbel, für welche die x-Axe die reelle, die y-Axe die imaginäre Axe ist. Zu dem Werte $\lambda = -\beta$ gehört ein reelles Punktepaar auf der x-Axe, und für $\lambda > -\beta$ erhalten wir eine Ellipse. Demnach enthält eine solche Schar alle verschiedenen Arten von eigentlichen Mittelpunktskurven und drei zerfallende Kurven. Die uneigentlichen Kurven sind

a) das Paar der Kreispunkte in der unendlichfernen Geraden

$$u^2 + v^2 = 0,$$

β) ein imaginäres Punktepaar in der y-Axe:

$$(\beta - \alpha)\, v^2 = w^2,$$

c) ein reelles Punktepaar in der x-Axe

$$(\alpha - \beta)\, u^2 = w^2.$$

Einen jeden Punkt, der einem der beiden letzten Paare angehört, nennen wir einen **Brennpunkt** für jede durch die Gleichung (3) dargestellte Kurve.

Jeder Mittelpunktskegelschnitt hat zwei Paare von Brennpunkten, und zwar zwei reelle und zwei imaginäre. Für die Ellipse liegen die reellen Brennpunkte auf der grofsen, für die Hyperbel auf der reellen Axe.

Da nach 1. die von den unendlichfernen Kreispunkten an einen Kegelschnitt gelegten Tangenten auch jede konfokale Kurve berühren, so sind diese Linien auch Tangenten für jedes Paar Brennpunkte; sie gehen also durch diese Punkte hindurch.

Die von den unendlichfernen Kreispunkten an einen Kegelschnitt gelegten Tangenten schneiden sich in den Brennpunkten.

8. Die Kurven der Schar (3) haben ein gemeinschaftliches Polardreieck, welches aus der unendlichfernen Geraden und den Axen der Kurven gebildet wird. Jede dieser drei Linien hat für die ganze Schar denselben Pol, während einer jeden andern Geraden nur eine einzige zweite Gerade als konjugierte Polare in Bezug auf alle Kurven der Schar zugeordnet ist.

9. Die reellen Brennpunkte liefern uns eine einfache Konstruktion konjugierter Polaren. Wenn die Gerade p die Axe der reellen Brennpunkte in einem Punkte α trifft, so mufs die konjugierte Polare p' durch den Punkt β gehen, welcher zu α den Brennpunkten gegenüber harmonisch liegt; man erhält also p' als die von β auf p gefällte Senkrechte.

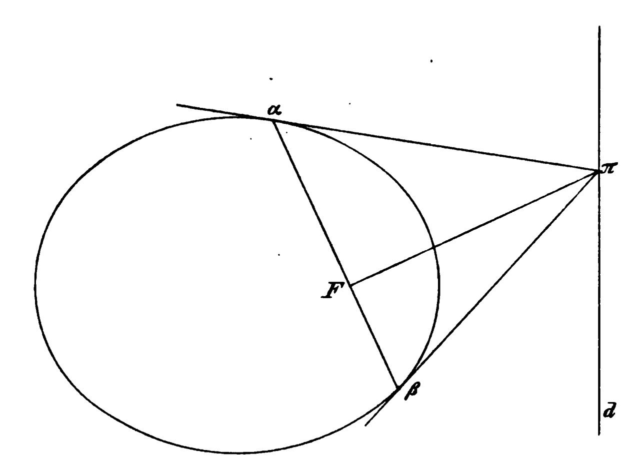
10. Geht die Gerade p durch einen Brennpunkt, so mufs auch p' durch denselben Punkt gehen, damit p und p' kongugierte Polare in Bezug auf die durch die Brennpunkte gebildete zerfallende Kurve sind. Daher ist die gemeinsame Polare p' die in diesem Punkte auf p errichtete Senkrechte. Mit andern Worten: Jeder durch einen Brennpunkt gehenden Geraden entspricht als gemeinsame Polare die in demselben Punkte auf ihr errichtete Senkrechte. Die Gerade p' enthält den Pol von p in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt der Schar; ebenso liegen die Pole von p' in Bezug auf eine solche Kurve in der Geraden p.

Jede durch einen Brennpunkt gehende Gerade hat ihren Pol (in Bezug auf den Kegelschnitt) senkrecht über diesem Punkte.

Wenn eine Gerade durch einen Brennpunkt einer Schar von konfokalen Kegelschnitten geht, so liegen

die ihr in Bezug auf die Kurven zugeordneten Pole in derjenigen Senkrechten, welche auf ihr in diesem Punkte errichtet wird.

11. Die Polare eines Brennpunktes in Bezug auf einen Kegelschnitt bezeichnet man als die zugehörige Direktrix. Sobald ein Brennpunkt F und die zugehörige Direktrix d gegeben ist,



findet man den Pol einer beliebigen durch F gehenden Geraden p als den Schnittpunkt π der in F auf p errichteten Senkrechten mit der Direktrix. In diesem Punkte π müssen sich aber auch die Tangenten schneiden, welche in den Schnittpunkten von p die Kurve berühren. Daraus ergiebt sich der Satz:

Die auf irgend einer Tangente eines Kegelschnitts von ihrem Berührungspunkte und einer Direktrix begrenzte Strecke wird von dem zugehörigen Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen.

12. Ordnet man in einem Strahlenbüschel jedem Strahle den durch seinen Pol gehenden Strahl zu, so erhält man eine Involution (§ 22, 11, 6). Indem man zum Mittelpunkte des Strahlenbüschels einen Brennpunkt der Kurve nimmt, liegt jeder Pol senkrecht über diesem Punkte; zwei konjugierte Polare eines Kegelschnitts, die durch einen Brennpunkt gehen, stehen jedesmal auf einander senkrecht. Die soeben angegebene Involution wird zu einer Kreisinvolution, sobald man einen Brennpunkt zu ihrem Scheitel nimmt.

Die Paare der sich in einem Brennpunkte treffenden konjugierten Polaren eines Kegelschnitts bilden eine Kreisinvolution.

13. Zu den von einem Punkte der Ebene an eine Kurve der Schar gelegten Tangenten gehören auch die nach einem Paare von Brennpunkten gezogenen Geraden. Für diese Linien gelten daher auch die in 2. und 3. bewiesenen Sätze. Speciell folgt somit:

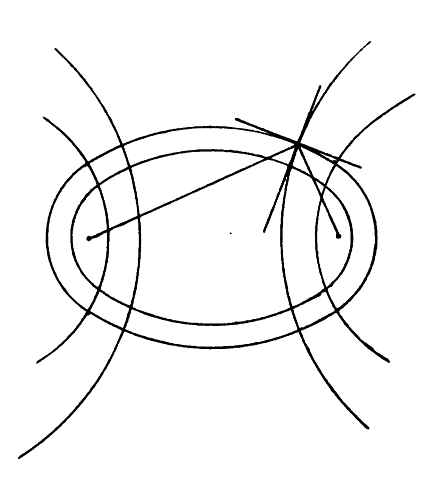
Die Winkel, welche die von einem Punkte einer Ellipse oder Hyperbel nach den Brennpunkten gezogenen Geraden mit einander bilden, werden durch die Tangente und die Normale des Punktes halbiert.

14. In rechtwinkligen Punktkoordinaten nimmt die Gleichung (3) die Gestalt an:

$$(5) \quad \frac{x^2}{\alpha+\lambda}+\frac{y^2}{\beta+\lambda}=1.$$

Man kann diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$(6) \quad (\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)-(\beta+\lambda)x^2-(\alpha+\lambda)y^2=0.$$



Denken wir hierin x und y gegeben und nehmen wir an, beide seien von null verschieden, so wird die linke Seite der Gleichung (6) für grofse Werte von λ positiv; für $\lambda=-\beta$ nimmt sie den Wert

$$-(\alpha-\beta)y^2$$

an, der negativ ist; dagegen wird sie für $\lambda=-\alpha$ gleich $-(\beta-\alpha)x^2$ und erhält wieder einen positiven Wert. Somit geht die linke Seite dieser Gleichung für einen gewissen Wert $\lambda=\lambda_1$, der $>-\beta$ ist, vom Positiven zum Negativen, und für einen zweiten Wert $\lambda=\lambda_2$, der zwischen $-\alpha$ und $-\beta$ liegt, vom Negativen zum Positiven über. Die Gleichung (6) hat somit bei gegebenen Werten von x und y, die von null verschieden sind, zwei Wurzeln λ_1 und λ_2.

Dabei stellt die Gleichung

$$(7)\quad \frac{x^2}{\alpha+\lambda_1}+\frac{y^2}{\beta+\lambda_1}=1 \qquad (\lambda_1>-\beta)$$

eine Ellipse, die Gleichung

$$(8)\quad \frac{x^2}{\alpha+\lambda_2}+\frac{y^2}{\beta+\lambda_2}=1 \qquad (-\beta>\lambda_2>-\alpha)$$

eine Hyperbel dar.

Durch jeden Punkt, der nicht in einer der Axen liegt, geht eine Hyperbel und eine Ellipse der Schar.

15. Die Gleichung (6) hat bei gegebenen Werten von x und y die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2. Daher gilt für jeden Wert von λ die Beziehung:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)=(\alpha+\lambda)(\beta+\lambda)-(\beta+\lambda)x^2-(\alpha+\lambda)y^2.$$

Setzen wir in dieser Gleichung einmal $\lambda=-\alpha$ und dann $\lambda=-\beta$, so erhalten wir die Beziehungen:

$$(\alpha+\lambda_1)(\alpha+\lambda_2)=(\alpha-\beta)x^2$$
$$(\beta+\lambda_1)(\beta+\lambda_2)=-(\alpha-\beta)y^2.$$

Daraus ergiebt sich:

$$(9)\quad x^2=\frac{(\alpha+\lambda_1)(\alpha+\lambda_2)}{\alpha-\beta},\quad y^2=\frac{(\beta+\lambda_1)(\beta+\lambda_2)}{\beta-\alpha}.$$

Denken wir uns jetzt λ_1 und λ_2 gegeben, suchen wir also die Schnittpunkte der zu diesen Parametern gehörenden Kurven, so erhalten wir reelle Werte für x und y, wenn $\alpha+\lambda_1$ und $\alpha+\lambda_2$ dasselbe, dagegen $\beta+\lambda_1$ und $\beta+\lambda_2$ entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wegen der zweiten Forderung mufs von den Gröfsen λ_1 und λ_2 die gröfsere λ_1 gröfser, die kleinere λ_2 kleiner als $-\beta$ sein. Da $-\beta>-\alpha$ ist, so ist auch λ_1 gröfser als $-\alpha$. Demnach mufs wegen der ersten Forderung auch $\lambda_2>-\alpha$ sein. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, ist mit andern Worten die eine der beiden konfokalen Kurven eine Ellipse, die andere eine Hyperbel, so erhalten wir für x, y vier reelle Wertepaare.

Zwei gleichartige konfokale Kegelschnitte haben keinen Punkt gemeinschaftlich; dagegen schneiden sich zwei konfokale Kegelschnitte, von denen der eine eine Ellipse, der andere eine Hyperbel ist, in vier Punkten, die zu den Axen symmetrisch liegen.

16. Ersetzt man in den Gleichungen (7) und (8) x, y durch

x', y' und subtrahiert diese Gleichungen von einander, so folgt nach Weglassung des Faktors $\lambda_1 - \lambda_2$:

$$(10)\quad \frac{x'^2}{(\alpha+\lambda_1)(\alpha+\lambda_2)}+\frac{y'^2}{(\beta+\lambda_1)(\beta+\lambda_2)}=0.$$

Um diese Gleichung zu interpretieren, beachte man, dafs die Gleichung der im Punkte (x', y') an die Kurven (7) und (8) gelegten Tangenten bzw. die Gleichungen haben:

$$(11)\quad \frac{xx'}{\alpha+\lambda_1}+\frac{yy'}{\beta+\lambda_1}=1,\quad \frac{xx'}{\alpha+\lambda_2}+\frac{yy'}{\beta+\lambda_2}=1.$$

Nun stehen zwei gerade Linien $ax+by=1$ und $a'x+b'y=1$ auf einander senkrecht, wenn $aa'+bb'=0$ ist. Für unsere beiden Tangenten ist

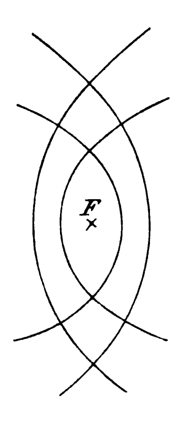
$$a=\frac{x'}{\alpha+\lambda_1},\quad b=\frac{y'}{\beta+\lambda_1},\quad a'=\frac{x'}{\alpha+\lambda_2},\quad b'=\frac{x'}{\beta+\lambda_2}.$$

Die Gleichung (10) sagt also aus, dafs die beiden Tangenten auf einander senkrecht stehen; sie liefert einen zweiten Beweis des Satzes, dafs ungleichartige konfokale Kegelschnitte einander senkrecht durchschneiden.

17. Wir wollen kurz auf die Gleichung (4) hinweisen. Diese stellt für jeden Wert von λ eine Parabel dar. Zu der Schar gehört aufser den unendlichfernen Kreispunkten ein einziges Punktepaar:

$$u(u+2\alpha w)=0.$$

Wir können diese Schar aus der soeben betrachteten dadurch gewinnen, dafs wir einen Brennpunkt und die Nebenaxe ins Unendlichferne rücken lassen. Alle diese Parabeln liegen symmetrisch zur x-Axe; ihr Schnittpunkt mit dieser Geraden, der Scheitel der Kurve, kann jede Lage auf dieser Geraden annehmen. Nur solche Parabeln schneiden einander, deren Scheitel auf verschiedenen Seiten des eigentlichen Brennpunktes liegen. Im übrigen erleiden die vorhin angegebenen Sätze so geringe Veränderungen, dafs es nicht nötig ist, sie hier anzugeben.




Übungen:

1) a) Von welcher allgemeinen Aufgabe ist die folgende ein specieller Fall: Einen

Kegelschnitt zu konstruieren, wenn seine Brennpunkte und eine Tangente gegeben sind?

b) Man löse diese Aufgabe.

c) Wo liegt der Pol der Geraden, welche den gefundenen Berührungspunkt mit einem Brennpunkte verbindet?

d) Wie findet man nach Lösung von b) und c) den Pol zu einer beliebigen durch einen Brennpunkt gehenden Geraden?

2) a) Man gebe die allgemeine Aufgabe an, von der die folgende ein specieller Fall ist: Einen Kegelschnitt zu konstruieren, von dem die Brennpunkte und ein Punkt gegeben sind?

b) Man löse die den Aufgaben 1) b), c), d) entsprechenden Aufgaben.

3) a) Man gebe die allgemeine Aufgabe an, von der die folgende ein specieller Fall ist: Einen Kegelschnitt aus einem Brennpunkte und drei Tangenten zu konstruieren.

b) Man löse diese Aufgabe.

(Bestimmt man jeden Gegenpunkt des Brennpunktes zu drei Tangenten, so mufs der andere Brennpunkt von diesen drei Punkten gleichen Abstand haben.)

4) Man leite aus den im Paragraphen angegebenen Sätzen den Satz her, dafs bei der Ellipse die Summe, bei der Hyperbel die Differenz der Brennstrahlen konstant ist.

5) Wenn die Gleichung einer Schar konfokaler Kegelschnitte in Linienkoordinaten gegeben ist, so bestimme man diejenigen Kurven, welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

(Soll der zum Parameter λ gehörende Kegelschnitt durch den Punkt $x'u + y'v + w = 0$ gehen, so schaffe man aus der Gleichung des Punktes und der der Schar die Gröfse w fort und suche die Bedingung, dafs die neue Gleichung für den Quotienten $u : v$ gleiche Wurzeln hat.)

6) a) Sucht man zu jeder Geraden, welche durch einen festen Punkt α einer Axe des Kegelschnitts geht, die auf ihr senkrecht stehende konjugierte Polare, so gehen alle dadurch gefundenen Geraden durch einen zweiten festen Punkt derselben Axe.

b) Die auf diese Weise gefundenen Punktepaare α und α' bestimmen eine Involution auf der Axe, deren Hauptpunkte die Brennpunkte sind.

c) Zusammengehörende Tangenten und Normalen eines Kegel-

schnitts bestimmen auf jeder Axe eine Involution, deren Hauptpunkte die Brennpunkte sind.

d) Konstruiert man zu allen Geraden, die durch einen festen Punkt einer Axe gehen, für eine Schar konfokaler Kegelschnitte die gemeinschaftlichen konjugierten Polaren, so gehen diese durch einen festen Punkt α' derselben Axe, der zum Punkte α in Bezug auf die in der Axe gelegten Brennpunkte harmonisch liegt.

7) In Hesseschen Koordinaten u_1, u_2, u_3 sei die Gleichung eines Kegelschnitts $\Sigma A_{\iota\varkappa} u_\iota u_\varkappa = 0$; man soll die Brennpunkte der Kurve finden.

(Die Brennpunkte sind die Schnittpunkte der von den Punkten $u_1 \pm i u_2 = 0$ ausgehenden Tangenten.)

8) Wenn $x_1 : x_3$ und $x_2 : x_3$ rechtwinklige Cartesische Koordinaten sind und in ihnen ein Kegelschnitt die Gleichung hat: $\Sigma a_{\iota\varkappa} x_\iota x_\varkappa = 0$, so sollen die Koordinaten der Brennpunkte bestimmt werden.




Math 8509.00
Lehrbuch der analytischen Geometrie
Cabot Science 003347848
3 2044 091 918 789